

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

и начала математического анализа

классы
(БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ)

**Методическое
пособие
для учителя**



Москва 2010

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21



М79

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы (базовый уровень) : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : Мнемозина, 2010. — 202 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01398-3

В пособии представлены примерное планирование учебного материала в 10 и 11 классах (в двух вариантах), методические рекомендации по работе с учебником А. Г. Мордковича «Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы», решение наиболее трудных задач из одноименного задачника.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-346-01398-3

© «Мнемозина», 2010
© Оформление. «Мнемозина», 2010
Все права защищены

Предисловие

Издательство «Мнемозина» опубликовало учебный комплект для изучения на базовом уровне курса алгебры и начал математического анализа в 10—11 классах общеобразовательной школы:

А. Г. Мордкович. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч 1. Учебник (базовый уровень). — М. : Мнемозина, 2008.

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник (базовый уровень). — М. : Мнемозина, 2008.

Учебные комплекты для изучения курса алгебры и начал математического анализа в общеобразовательной школе, созданные авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича, успешно используются в российских школах, начиная с 2000 года. Это достаточный срок для осмысления и переосмысления сделанного, для внесения необходимых коррективов. К этому вынуждают советы и замечания учителей, изменения в собственных методических представлениях и, наконец, три объективные причины.

Первая причина — действующий с 2004 года государственный стандарт математического образования, установки которого, разумеется, должны быть отражены в наших пособиях (что, впрочем, мы постоянно делали в переизданиях).

Вторая причина — читателю, вероятно, известно, что в 2006—2007 годах состоялся глобальный смотр всех школьных учебников, который осуществляли Российская академия образования (методический аспект) и Российская академия наук (научный аспект). Эти две солидные организации не могли не сделать ценных замечаний по каждому из учебников, с чем, естественно, пришлось считаться авторам. В итоге, начиная с 2008 года, большинство школьных учебников издается в измененных редакциях, к чему, разумеется, должны быть готовы педагоги.

Третья причина — уменьшение количества часов в неделю, отводимых в старшей школе на изучение курса математики на базовом уровне. Значит, и в учебнике, и в задачнике мы вынуждены были сделать некоторые сокращения.

Сравним хорошо известный учителям комплект (А. Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник. — М. : Мнемозина, 2000—2007; А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник. — М. : Мнемозина, 2000—2007) с новым комплектом, предназначенным для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10—11 классах общеобразовательной школы на базовом уровне.

1) Появились две новые главы. Глава 1 «Числовые функции» (определение числовой функции; способы ее задания; свойства функций; обратная функция) в основном содержит материал, который должен быть известен учащимся из курса алгебры основной школы; исключение составляет новая тема «Обратная функция».

Еще одна новая глава — глава 9 «Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей»; более подробное ее содержание вы можете увидеть ниже, в тематическом планировании.

2) Кроме отдельных сокращений, стилистических и редакционных изменений, не претерпели существенных изменений главы 2—5 (тригонометрия и производная, разве что в предыдущих изданиях это были главы 1—4), а также главы 6 и 7 (степенные, показательные и логарифмические функции).

3) По-новому расположена глава «Первообразная и интеграл». Ранее она предшествовала изучению степенных, показательных и логарифмических функций, теперь же заняла место после них — это глава 8. Снят весь материал о неопределенном интеграле.

4) В главе 10 (бывшая глава 8 «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств») добавили параграф об уравнениях и неравенствах с двумя переменными, предусмотренный стандартом.

5) Изменена структура задачника: в каждом параграфе набор заданий теперь не четырехуровневый, а трехуровневый; задач повышенной сложности не так уж много, поскольку большинство таких задач «перекочевало» в наш задачник для профильной школы. Кроме того, мы сочли целесообразным сделать нумерацию упражнений в задачнике не сквозной, а отдельной для каждого параграфа: это позволит нам оперативнее реагировать в дальнейшем на различные изменения и новшества, связанные с Единым государственным экзаменом по математике.

Новые версии учебника и задачника отличаются от изданий 2000—2007 годов и внешним оформлением.

Естественно, что переработанный учебный комплект потребовал создания нового методического обеспечения.

В него вошли следующие книги:

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы (базовый уровень): методическое пособие для учителя. (Именно оно сейчас у вас в руках.);

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Контрольные работы (базовый уровень) / Под ред. А. Г. Мордковича;

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы (базовый уровень) / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

Цель данной книги — оказать методическую помощь учителям, работающим по указанным выше учебнику и задачнику. Здесь вы найдете примерное планирование учебного материала из расчета 3 ч в неделю на изучение курса в первом полугодии и 2 ч — во втором (напомним, что на базовом уровне на изучение всего курса математики в 10—11 классах отводится 4 ч в неделю), примерное планирование из расчета 3 ч в неделю в течение года, методические рекомендации по всем темам (главам) учебника. Содержание этих рекомендаций в пределах каждой темы не унифицировано, оно естественным образом зависит от важности и трудности темы, степени ее методической новизны. В одних случаях мы ограничиваемся отдельными методическими замечаниями и советами, в других — разговор идет на концептуальном уровне.

Естественно, что учителя, которые использовали наши учебные комплекты при изучении курса алгебры в 7—9 классах, при работе с данным комплектом будут иметь определенные преимущества перед теми педагогами, которые работали по другим учебникам. Учитывая это обстоятельство, мы включили в данное методическое пособие ряд вопросов идеологии, педагогики, психологии и методики, которые были рассмотрены в наших методических пособиях по изучению курса алгебры в 7—9 классах.

Во второй части пособия приведены решения трудных задач из задачника (тех, которые отмечены символом *). Заметим, что трудных задач сравнительно немного (их стало значительно меньше по сравнению с тем количеством, которое было в нашем задачнике образца 2000—2007 годов). Если ваши возможности и возможности вашего класса позволяют, вы можете использовать наш задачник для профильного класса.

В заключение сделаем вам (как коллеги коллегам) одно признание. Авторский коллектив под руководством А. Г. Мордковича создал три учебно-методических комплекта для изучения в школе курса алгебры и начал математического анализа. Первый — тот, что действовал в период с 2000 по 2007 год (учебник, задачник, книга для учителя, контрольные работы, самостоятельные работы, тематические тесты и зачеты) и был рассчитан в общеобразовательной школе на 3 часа в неделю. Второй — комплект для профильной школы (здесь 10 и 11 классы разделены: два учебника, два задачника, две книги для учителя, два сбор-

ника контрольных работ), рассчитанный на 4, 5 и даже 6 часов в неделю. Третий — тот, о котором идет речь в настоящем пособии. На базовом уровне, предусмотренном стандартом, материала изучается больше, а часов отводится меньше, чем было в общеобразовательной школе в период с 2000 по 2006 год, в результате чего курс получается несколько ущербным. Если выстроить указанные варианты изложения курса по степени авторского пристрастия, то, как вы, вероятно, догадываетесь, мы отдадим предпочтение второму комплекту (для профильного уровня), на второе место поставим первый, а комплекту для базового уровня отведем последнее место. Учителю, работающему на базовом уровне, мы советуем иметь под рукой комплекты для профильного уровня и по возможности (и при желании) дополнять изучение курса некоторыми материалами из этого комплекта.

В настоящем пособии материалы, относящиеся к главе 9 учебника и задачника, написаны П. В. Семеновым, остальные — А. Г. Мордковичем.

Авторы

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Вариант 1

(из расчета 3 ч в неделю в 1-м полугодии и 2 ч во 2-м полугодии)

10 класс

1-е полугодие (48 ч)

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|--------------|
| Глава 1. Числовые функции (5 ч) | |
| §1. Определение числовой функции. Способы ее задания | 2 |
| §2. Свойства функций | 2 |
| §3. Обратная функция | 1 |
| Глава 2. Тригонометрические функции (23 ч) | |
| §4. Числовая окружность | 2 |
| §5. Числовая окружность на координатной плоскости | 2 |
| <i>Контрольная работа № 1</i> | 1 |
| §6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс | 2 |
| §7. Тригонометрические функции числового аргумента | 2 |
| §8. Тригонометрические функции углового аргумента | 1 |
| §9. Формулы приведения | 2 |
| <i>Контрольная работа № 2</i> | 1 |
| §10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график | 2 |
| §11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график | 2 |
| §12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ | 1 |
| §13. Преобразования графиков тригонометрических функций | 2 |
| §14. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики | 2 |
| <i>Контрольная работа № 3</i> | 1 |
| Глава 3. Тригонометрические уравнения (9 ч) | |
| §15. Арккосинус и решение уравнения $\cos t = a$ | 2 |
| §16. Арксинус и решение уравнения $\sin t = a$ | 2 |
| §17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ | 1 |
| §18. Тригонометрические уравнения | 3 |
| <i>Контрольная работа № 4</i> | 1 |

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|--|--------------|
| Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений (11 ч) | |
| § 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов | 2 |
| § 20. Тангенс суммы и разности аргументов | 1 |
| § 21. Формулы двойного аргумента | 2 |
| § 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения | 3 |
| <i>Контрольная работа № 5</i> | 1 |
| § 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы | 2 |

2-е полугодие (34 ч)

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|--------------|
| Глава 5. Производная (28 ч) | |
| § 24. Числовые последовательности и их свойства. Предел последовательности | 1 |
| § 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии | 1 |
| § 26. Предел функции | 3 |
| § 27. Определение производной | 3 |
| § 28. Вычисление производных | 3 |
| <i>Контрольная работа № 6</i> | 1 |
| § 29. Уравнение касательной к графику функции | 2 |
| § 30. Применение производной для исследований функций на монотонность и экстремумы | 3 |
| § 31. Построение графиков функций | 3 |
| <i>Контрольная работа № 7</i> | 1 |
| § 32. Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке | 2 |
| Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин | 3 |
| <i>Контрольная работа № 8</i> | 2 |
| <i>Повторение</i> | 6 |

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|--|--------------|
| Глава 6. Степени и корни. Степенные функции (15 ч) | |
| § 33. Понятие корня n -й степени из действительного числа | 2 |
| § 34. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики | 2 |
| § 35. Свойства корня n -й степени | 2 |
| § 36. Преобразование выражений, содержащих радикалы | 3 |
| <i>Контрольная работа № 1</i> | 1 |
| § 37. Обобщение понятия о показателе степени | 2 |
| § 38. Степенные функции, их свойства и графики | 3 |
| Глава 7. Показательная и логарифмическая функции (24 ч) | |
| § 39. Показательная функция, ее свойства и график | 3 |
| § 40. Показательные уравнения и неравенства | 3 |
| <i>Контрольная работа № 2</i> | 1 |
| § 41. Понятие логарифма | 1 |
| § 42. Логарифмическая функция, ее свойства и график | 2 |
| § 43. Свойства логарифмов | 2 |
| § 44. Логарифмические уравнения | 3 |
| <i>Контрольная работа № 3</i> | 1 |
| § 45. Логарифмические неравенства | 3 |
| § 46. Переход к новому основанию логарифма | 2 |
| § 47. Дифференцирование показательной и логарифмической функций | 2 |
| <i>Контрольная работа № 4</i> | 1 |
| Глава 8. Первообразная и интеграл (9 ч) | |
| § 48. Первообразная | 3 |
| § 49. Определенный интеграл | 3 |
| <i>Контрольная работа № 5</i> | 1 |
| Резервные уроки | 2 |

2-е полугодие (34 ч)

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|--|--------------|
| Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей (11 ч) | |
| § 50. Статистическая обработка данных | 2 |
| § 51. Простейшие вероятностные задачи | 2 |
| § 52. Сочетания и размещения | 2 |
| § 53. Формула бинома Ньютона | 2 |
| § 54. Случайные события и их вероятности | 2 |
| <i>Контрольная работа № 6</i> | 1 |
| Глава 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств (17 ч) | |
| § 55. Равносильность уравнений | 2 |
| § 56. Общие методы решения уравнений | 3 |
| § 57. Решение неравенств с одной переменной | 3 |
| § 58. Уравнения и неравенства с двумя переменными | 1 |
| § 59. Системы уравнений | 3 |
| § 60. Уравнения и неравенства с параметрами | 3 |
| <i>Контрольная работа № 7</i> | 2 |
| <i>Повторение</i> | 6 |

Вариант 2

(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч в год)

10 класс

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|--------------|
| Глава 1. Числовые функции (9 ч) | |
| § 1. Определение числовой функции. Способы ее задания | 3 |
| § 2. Свойства функций | 3 |
| § 3. Обратная функция | 3 |
| Глава 2. Тригонометрические функции (26 ч) | |
| § 4. Числовая окружность | 2 |
| § 5. Числовая окружность на координатной плоскости | 3 |
| <i>Контрольная работа № 1</i> | 1 |

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|--|--------------|
| § 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс | 3 |
| § 7. Тригонометрические функции числового аргумента | 2 |
| § 8. Тригонометрические функции углового аргумента | 2 |
| § 9. Формулы приведения | 2 |
| <i>Контрольная работа № 2</i> | 1 |
| § 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график | 2 |
| § 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график | 2 |
| § 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ | 1 |
| § 13. Преобразования графиков тригонометрических функций | 2 |
| § 14. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики | 2 |
| <i>Контрольная работа № 3</i> | 1 |
| Глава 3. Тригонометрические уравнения (10 ч) | |
| § 15. Арккосинус и решение уравнения $\cos t = a$ | 2 |
| § 16. Арксинус и решение уравнения $\sin t = a$ | 2 |
| § 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ | 1 |
| § 18. Тригонометрические уравнения | 4 |
| <i>Контрольная работа № 4</i> | 1 |
| Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений (15 ч) | |
| § 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов | 4 |
| § 20. Тангенс суммы и разности аргументов | 2 |
| § 21. Формулы двойного аргумента | 3 |
| § 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения | 3 |
| <i>Контрольная работа № 5</i> | 1 |
| § 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы | 2 |
| Глава 5. Производная (31 ч) | |
| § 24. Числовые последовательности и их свойства. Предел последовательности | 2 |
| § 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии | 2 |
| § 26. Предел функции | 3 |

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|--------------|
| § 27. Определение производной | 3 |
| § 28. Вычисление производных | 3 |
| Контрольная работа № 6 | 1 |
| § 29. Уравнение касательной к графику функции | 2 |
| § 30. Применение производной для исследований функций на монотонность и экстремумы | 3 |
| § 31. Построение графиков функций | 3 |
| Контрольная работа № 7 | 1 |
| § 32. Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке | 3 |
| Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин | 3 |
| Контрольная работа № 8 | 2 |
| Повторение | 11 |

11 класс

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|--|--------------|
| Глава 6. Степени и корни. Степенные функции (18 ч) | |
| § 33. Понятие корня n -й степени из действительного числа | 2 |
| § 34. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики | 3 |
| § 35. Свойства корня n -й степени | 3 |
| § 36. Преобразование выражений, содержащих радикалы | 3 |
| Контрольная работа № 1 | 1 |
| § 37. Обобщение понятия о показателе степени | 3 |
| § 38. Степенные функции, их свойства и графики | 3 |
| Глава 7. Показательная и логарифмическая функции (29 ч) | |
| § 39. Показательная функция, ее свойства и график | 3 |
| § 40. Показательные уравнения и неравенства | 4 |
| Контрольная работа № 2 | 1 |
| § 41. Понятие логарифма | 2 |
| § 42. Логарифмическая функция, ее свойства и график | 3 |

| Изучаемый материал | Кол-во часов |
|--|--------------|
| § 43. Свойства логарифмов | 3 |
| § 44. Логарифмические уравнения | 3 |
| Контрольная работа № 3 | 1 |
| § 45. Логарифмические неравенства | 3 |
| § 46. Переход к новому основанию логарифма | 2 |
| § 47. Дифференцирование показательной и логарифмической функций | 3 |
| Контрольная работа № 4 | 1 |
| Глава 8. Первообразная и интеграл (8 ч) | |
| § 48. Первообразная | 3 |
| § 49. Определенный интеграл | 4 |
| Контрольная работа № 5 | 1 |
| Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей (15 ч) | |
| § 50. Статистическая обработка данных | 3 |
| § 51. Простейшие вероятностные задачи | 3 |
| § 52. Сочетания и размещения | 3 |
| § 53. Формула бинома Ньютона | 2 |
| § 54. Случайные события и их вероятности | 3 |
| Контрольная работа № 6 | 1 |
| Глава 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств (20 ч) | |
| § 55. Равносильность уравнений | 2 |
| § 56. Общие методы решения уравнений | 3 |
| § 57. Решение неравенств с одной переменной | 4 |
| § 58. Уравнения и неравенства с двумя переменными | 2 |
| § 59. Системы уравнений | 4 |
| § 60. Уравнения и неравенства с параметрами | 3 |
| Контрольная работа № 7 | 2 |
| Повторение | 12 |

Методические рекомендации по работе с учебником

ТЕМА 1

Числовые функции

В первой главе учебника учащимся напоминают известные из курса алгебры основной школы определения числовой функции и ее различных свойств: область определения, область (множество) значений, монотонность, ограниченность, наименьшее и наибольшее значения на промежутке области определения, четность и нечетность. Заметим, что понятия наименьшего и наибольшего значений функции в российских школах долгое время вводили только в теме «Производная». Разумеется, производная дает метод отыскания этих значений, но этот метод не единственный, во многих случаях ответ на вопрос о наименьшем и наибольшем значениях функции можно дать с помощью элементарных приемов или с помощью графика функции (эту линию мы внедрили в наши учебники алгебры для 7—9 классов).

Бопреки сложившейся традиции, мы, давая определение четной или нечетной функции, не включаем в него требование симметричности области определения. Это — *необходимое условие* четности или нечетности функции, оно оформлено в виде отдельного утверждения. Определение же, как это принято в математике, должно быть минимизировано.

В связи с исследованием функций на четность обратим внимание читателя на одно принципиальное обстоятельство. Речь идет о неявном приобщении школьников к законам формальной логики, согласно которым отрицание утверждения, содержащего квантор общности, приводит к утверждению, содержащему квантор существования, и обратно. Устанавливая факт четности или нечетности функции $y = f(x)$, нужно проверить, что равенство $f(-x) = f(x)$ или, соответственно, $f(-x) = -f(x)$ выполняется для *всех* значений x из области определения функции. Устанавливая же факт отсутствия как четности, так и нечетности функции, достаточно показать, что *существует хотя бы одно* значение x , для которого $f(-x) \neq f(x)$, и *хотя бы одно* значение x , для которого $f(-x) \neq -f(x)$.

Используются также понятия выпуклости и непрерывности — на наглядно-интуитивном уровне (заметим, что понятие выпуклости в дальнейшем на уровень формального определения

переведено не будет, а точное определение непрерывности мы сможем получить в § 26, где речь идет о пределе функции). Новому свойству функции — обратимости — посвящен отдельный § 3.

Кроме того, в первой главе учебника напоминаются основные способы задания функции — аналитический, графический, табличный, словесный — и активно используются кусочные функции (учащиеся, которые изучали алгебру в основной школе по нашим учебникам, к этому уже приучены). Речь также идет о преобразованиях графиков: как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a) + b$, $y = -f(x)$.

Завершая разговор о первой главе учебника, обратим внимание читателя на несколько обстоятельств. В многочисленных пособиях для средней школы встречается словосочетание «функция $f(x)$ ». Этот жаргон, понятный математикам, вреден для правильного формирования у учащихся понятия функции. Определение функции гласит: если даны числовое множество X и правило f , позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X однозначно определенное число y , то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X , и пишут $y = f(x)$, $x \in X$. В определении подчеркивается, что, говоря о функции, надо одновременно использовать *две переменные*: x и y . Они же указывают обозначения для координатной плоскости, на которой строится график функции. Наша точка зрения: $f(x)$ — это *выражение с переменной*, а не функция, некорректно говорить о его графике (ведь даже обозначения координатных осей не указаны) или о каких-то его функциональных свойствах (некорректно, например, требовать исследовать выражение на монотонность, ограниченность и т. д.). Для функции же всюду в нашем комплексе используется обозначение $y = f(x)$.

Коль скоро мы заговорили о принятых обозначениях, упомянем еще два: с нашей точки зрения, для обозначения области определения и области значений функции целесообразнее использовать символы $D(f)$ и $E(f)$, а не $D(y)$ и $E(y)$; все-таки символом *функции* является f , а не y .

Обратите также внимание на то, что в нашем курсе, в отличие от традиционных школьных подходов, акцент сделан на *заданную*, а не на *естественную* область определения функции (эта линия проводится в наших учебниках начиная с 7 класса, особенно в кусочных функциях). В традиционных курсах учащиеся в большинстве случаев работают с естественной областью определения функции, им привычна запись типа «функция $y = \sqrt{x}$ » и часто вызывает недоумение запись типа «функция $y = \sqrt{x}$, $x \in [1; 4]$ ». Многие из них думают, что это одна и та же функция, но заданная на различных промежутках. Следует приучать школьников к тому, что это *разные функции*, поскольку опре-

деление функции включает в себя две позиции: *область определения* и *правило соответствия*. Для совпадения двух функций нужно установить тождественность обеих указанных позиций.

ТЕМА 2

Тригонометрические функции

Эта тема и в учебнике и в задачнике распадается на две части. Первая часть — числовая окружность и определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса (§ 4—9), вторая — тригонометрические функции, их графики и свойства (§ 10—14). Для удобства читателя методическим рекомендациям по каждой из указанных частей мы отводим в этой главе отдельный пункт.

Числовая окружность и определения тригонометрических функций

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной числовой окружности. При этом практически всем учебникам присущ один и тот же недостаток: недооценка важности изучения самой модели «числовая окружность» и сложности дидактических компонентов, которые связаны с изучением этой модели. О каких дидактических компонентах идет речь?

1) Числовая прямая изучается в школе в течение четырех лет: в 5 классе речь идет о координатном луче, в 6—7 классах — о координатной прямой и, наконец, в 8 классе, после введения понятия действительного числа, — о числовой прямой. Числовая прямая считается изученной, когда учащиеся свободно решают задачи четырех типов: по заданному числу находят точку на прямой, по точке находят соответствующее число, умеют переходить от геометрической модели числового промежутка к аналитической записи и обратно. Числовая окружность представляет собой более сложную модель, на которой тем не менее надо научиться решать задачи тех же четырех типов. Это требует времени и внимания как со стороны авторов учебников, так и учителей.

2) Понятие длины дуги, которое лежит в основе любых действий с числовой окружностью, не является надежно отработанным в курсе геометрии; значит, на это следует обратить внимание.

3) И авторы учебников, и учителя должны с пониманием относиться к тем трудностям, с которыми столкнутся учащиеся в начале изучения тригонометрии: непривычная модель (число-

вая окружность) и непривычный, «неаналитический» способ введения новых функций (синус — ордината, косинус — абсцисса точки числовой окружности). При этом от учащихся фактически требуется умение работать одновременно в двух системах координат: «криволинейной», когда снимаем информацию о положении точки на числовой окружности, и декартовой, когда снимаем информацию об абсциссе и ординате точки.

Опыт показывает: недоработки с моделью числовой окружности и слишком поспешное введение тригонометрических функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного изучения материала. Более того, на самом деле школьникам приходится изучать не одну, а две новые модели: первая — собственно числовая окружность, а вторая — числовая окружность на координатной плоскости. Подчеркнем, что речь идет именно об окружности, а не о круге, поэтому в нашем учебнике вы не найдете столь любимого многими учителями словосочетания «тригонометрический круг».

Учитывая вышесказанное, мы уделяем большое внимание подготовке к введению основных определений: в первых двух параграфах соответствующей главы учебника речь идет о моделях «числовая окружность» и «числовая окружность на координатной плоскости», а в задачнике представлены упражнения на вычисление длин дуг единичной окружности.

Для успешного овладения указанными моделями и в учебнике, и в задачнике предусмотрена система специальных «дидактических игр».

Первая «игра» — вычисление длины дуги единичной окружности. Учащиеся должны привыкнуть к тому, что длина всей окружности равна 2π , половины окружности — π , четверти окружности — $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Вторая «игра» — отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным в долях числа π ($\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$), например точек $M\left(\frac{11\pi}{4}\right), M\left(\frac{37\pi}{6}\right)$ и т. д. («хорошие» числа и точки).

Третья «игра» — отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным не в долях числа π , например точек $M(1), M(-5)$ и т. д. («плохие» числа и точки).

Четвертая «игра» — запись чисел, соответствующих данной «хорошей» точке числовой окружности; например, «хорошей» является середина первой четверти, соответствующие ей числа имеют вид $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пятая «игра» — составление аналитических записей (двойных неравенств) для дуг числовой окружности. Например, если дана дуга, соединяющая середину первой четверти (начало дуги) и нижнюю точку из тех двух, что делят вторую четверть на три равные части (конец дуги), то соответствующая аналитическая запись имеет вид $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Если у той же дуги поменять местами начало и конец, то соответствующая аналитическая запись дуги будет иметь вид $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Шестая «игра» — от данной аналитической записи дуги (двойного неравенства) перейти к ее геометрическому изображению.

Заметим, что эти шесть «игр» обеспечивают умение решать задачи четырех основных типов, связанных с числовой окружностью, о которых мы упоминали выше (от числа к точке, от точки к числу, от дуги к двойному неравенству, от двойного неравенства к дуге).

Следующие «дидактические игры» относятся к модели «числовая окружность на координатной плоскости». Приступая к изучению этой модели, мы должны отчетливо сознавать, какие трудности ждут учащихся. Прежде всего от них требуется довольно высокий уровень математической культуры, достаточный для того, чтобы работать одновременно в двух системах координат — криволинейной и декартовой, — об этом уже упоминалось выше. Чтобы помочь им преодолеть указанную трудность, мы применяем новый методический прием: для точки M числовой окружности используем запись $M(t)$, если речь идет о криволинейной координате точки M , или запись $M(x; y)$, если речь идет о декартовых координатах точки.

Иногда в пособиях для школы с самого начала используют записи $\sin x$, $\cos x$, не учитывая, что буква x в сознании учащихся ассоциируется с абсциссой в декартовой системе координат, а не с длиной пройденного по окружности пути. В нашем учебнике при работе с числовой окружностью нигде не используются указанные записи, используются символы $\sin t$, $\cos t$.

Седьмая «игра» — отыскание координат «хороших» точек числовой окружности. Речь идет о переходе от записи $M(t)$ к записи $M(x; y)$. Например, $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = M(0; 1)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$M\left(\frac{\pi}{6}\right) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad M\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad M\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

и т. д.

В процессе этой «игры» школьники фактически учатся вычислять значения тригонометрических функций. Например, из последнего равенства следует (но об этом они узнают позже), что $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, а $\cos\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Восьмая «игра» — отыскание знаков координат «плохих» точек числовой окружности. Если, например, $M(2) = M(x; y)$, то $x < 0$, $y > 0$. В процессе этой «игры» школьники фактически учатся определять знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности. Например, из последнего равенства следует (об этом они также узнают позже), что $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$.

Девятая «игра» — отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Например, если $y = \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют две точки числовой окружности, их главные имена $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$, а все име-

на охватываются двумя формулами: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Важность девятой «игры» очевидна: готовим учащихся к решению простейших тригонометрических уравнений вида $\sin t = a$, $\cos t = a$. Для понимания сути дела следует прежде всего научить школьников решать эти уравнения с помощью числовой окружности, не торопясь переходить к готовым формулам.

Еще раз обращаем внимание читателя на использование обозначений: ни в учебнике, ни в задачнике в первой главе, посвященной тригонометрии (в главе 2), не предлагается учащимся решить уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а предлагается решить

уравнения $\sin t = \frac{1}{2}$, $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. К традиционной записи (с переменной x) мы вернемся в главе 3, посвященной тригонометрическим уравнениям, когда начнем решать уравнения по готовым формулам без помощи числовой окружности. В обучении математике не бывает мелочей, иногда причина недопонимания кроется всего лишь в выборе неудачных обозначений.

Десятая «игра» — отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству. Например, если $y > \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют точки открытой дуги MP (рис. 1); числа t — прообразы этих точек — удовлетворяют неравенству $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Таким образом, мы работаем на опережение: готовим учащихся к решению тригонометрических неравенств вида $\sin t > a$, $\cos t < a$.

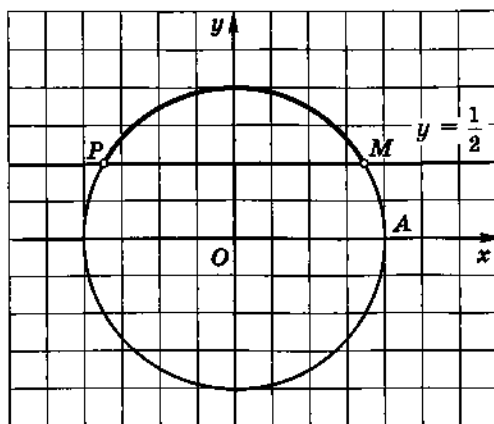


Рис. 1

Фактически для решения неравенств указанного типа используется следующий алгоритм:

1) от аналитической модели $\left(y > \frac{1}{2}\right)$ переходим к геометрической модели — дуга MP числовой окружности;

2) составляем ядро аналитической записи дуги MP (это, собственно говоря, главное, чему следует научить школьников); для дуги MP получаем

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6};$$

3) составляем общую запись:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Если бы речь шла о неравенстве $y < \frac{1}{2}$, то геометрической моделью служила бы дуга PM . При записи ядра нужно учесть, что точка $A(0)$ лежит внутри дуги, поэтому к началу дуги нам приходится двигаться по первой отрицательной окружности. Следовательно, ядро аналитической записи дуги PM имеет вид $-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6}$, а общая запись такова: $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Термины «ядро аналитической записи дуги», «аналитическая запись дуги» не являются общепринятыми, они введены нами из чисто методических соображений, использовать их или нет — дело учителя.

Указанные выше 10 «дидактических игр» рассматриваются в § 4 и 5. В § 6 вводятся названия для декартовых координат точек числовой окружности: абсцисса точки $M(t)$ — это $\cos t$, а ордината — $\sin t$. Чтобы учащиеся приняли эти определения осознанно, им предлагаются те же «игры», но в новой формулировке.

Например: вычислить $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$ — переформулировка седьмой «игры»; решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$ — переформулировка девя-

той «игры»; определить знак числа $\sin 2$ — переформулировка восьмой «игры»; решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$ — переформули-

ровка десятой «игры». Подчеркнем, что на первых уроках тригонометрии простейшие тригонометрические уравнения и неравенства используются не как *цель обучения*, а только как *средство* для усвоения главного — определений синуса и косинуса как декартовых координат точки числовой окружности.

В § 6 выводятся известные свойства синуса и косинуса, а затем тангенса и котангенса. Обратите внимание на два обстоятельства.

Первое. Говоря о том, что $\sin(-t) = -\sin t$, $\cos(-t) = \cos t$, мы избегаем в этом параграфе терминов «четная функция», «нечетная функция». Дело в том, что мы еще не рассматриваем тригонометрические функции, а работаем только с тригонометрическими выражениями (об аккуратном отношении к терминам «функция», «выражение» мы говорили выше, в теме 1). Как только в § 10 и 11 начнем изучать тригонометрические функции, упомянутые свойства обретут свой привычный статус. То же относится к термину «периодичность».

Второе. Формулы приведения, выводимые (из геометрических соображений) в § 9, носят вспомогательный характер. Формулы $\sin(t + \pi) = -\sin t$ и $\cos(t + \pi) = -\cos t$ нужны в этом параграфе для получения важных свойств тангенса и котангенса: $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t$. И в учебнике, и в задачнике многие формулы приведения будут получены исходя из геометрических соображений; можете рассматривать это как еще одну «дидактическую игру».

Говоря в первый раз о тригонометрических функциях (§ 10), мы используем обозначения $u = \sin t$, $u = \cos t$, а не традиционные обозначения $y = \sin x$, $y = \cos x$. Дело в том, что (повторим еще раз) x и y к этому моменту играют другие роли: x — это абсцисса точки числовой окружности, т. е. $\cos t$, а y — это ордината точки числовой окружности, т. е. $\sin t$. Чтобы не создавать учащимся дополнительные (и явно неоправданные) трудности, мы и выбрали такой нетрадиционный для современной школы подход.

К обычным обозначениям, как уже было сказано ранее, мы вернемся позднее, когда будем располагать достаточными теоретическими знаниями, чтобы каждый раз не обращаться к числовой окружности.

Основная цель § 8 «Тригонометрические функции углового аргумента» состоит в том, чтобы собрать воедино старые и новые представления учащихся об основных понятиях тригонометрии. В курсе геометрии (да и в курсе физики) они говорили о синусе, косинусе, тангенсе *угла*, а не *числа*. Необходимо убедить их в том, что те модели, которые использовались в курсе геометрии (синус, косинус, тангенс, котангенс как отношения сторон прямоугольного треугольника), легко и естественно вписываются в новые модели более общего характера. Короче говоря, ученики должны понять, что есть только одно определение тригонометрических функций: то, которое связано с числовой окружностью. Определение, связанное с прямоугольным треугольником, — частный случай общего определения. Предпочтение, на наш взгляд, следует отдать словосочетанию «тригонометрическая функция числа» и реже употреблять компромиссное словосочетание «тригонометрическая функция угла». Например, практически нигде в учебнике мы не используем архаичное «синус двойного угла», — мы говорим «синус двойного аргумента».

Тригонометрические функции, их свойства и графики

В нашей концепции школьного курса алгебры среди основных содержательно-методических линий приоритет отдается функционально-графической линии. Это вполне естественно, так как наша концепция основана на идеологии математического моделирования и математического языка, а первичной математической моделью, по сути дела, является функция. Для понимания учащимися курса алгебры в целом прежде всего важно, чтобы они полноценно усвоили первичные модели. Это значит, что надо так организовать их деятельность по изучению той или иной функции, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель — функцию) системно, с разных сторон, в различных ситуациях. В то же время эта системность не должна носить характер набора случайных сюжетов, разных для различных классов функций — это создаст ситуацию дискомфорта в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций *инвариантного ядра, универсального для любого класса функций*.

Инвариантное ядро во всех наших учебниках и задачниках, начиная с 7 класса, состоит из шести направлений: 1) графи-

ческое решение уравнений; 2) отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке; 3) преобразование графиков; 4) функциональная символика; 5) кусочные функции; 6) чтение графика.

Учащиеся привыкают к тому, что какой бы новый класс функций они ни изучали, обязательно в системе упражнений будут упражнения, рассредоточенные по указанным шести блокам. Образно говоря, это шесть красок, с помощью которых изучаемая математическая модель — функция — становится понятной, красивой и привычной. Создается эффект предсказуемости хода учебного процесса на уроке, что делает работу учителя и ученика согласованной, поэтому довольно комфортной. Раскроем методические особенности каждого из указанных направлений.

1. Графическое решение уравнений. Что дает графический метод решения уравнений для изучения той или иной функции? Он приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради графика, а для решения другой задачи — для решения уравнения. Построение графика функции является *целью*, а *средством*, помогающим решить уравнение. Это способствует и непосредственному изучению функции, и ликвидации того неприятия отношения учащихся к функциям и графикам, которое, к сожалению, сопутствует традиционным способам организации изучения курса алгебры в общеобразовательной школе. В наших учебных пособиях графический метод решения уравнения всегда предшествует аналитическим методам. Ученики, начиная с 7 класса, привыкают к нему и относятся как к своему первому помощнику, поскольку, подчеркнем еще раз, никаких других приемов решения того или иного уравнения до поры до времени не знают. Опыт показывает, что графический метод решения уравнений им нравится, они чувствуют его полезность и красоту. В то же время, что не менее важно, они ощущают проблемность ситуации, вызванную ненадежностью этого метода решения уравнений.

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке. Начиная с 7 класса, мы предлагаем учащимся задания типа: найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Предполагается, что ученик построит график функции $y = f(x)$, выделит часть графика на отрезке $[a; b]$ и по графику найдет наибольшее и наименьшее значения функции. В чем методическая ценность подобного задания? В том, что это новая «игра» с изучаемой функцией, когда график нужен не сам по себе, а для ответа на вопрос задачи (построение графика опять-таки является не целью, а средством).

К тому моменту, когда для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке будет привлечена производная, учащиеся накопят достаточно большой и полезный опыт решения аналогичных задач без помощи производной.

3. Преобразование графиков. В курсе алгебры 8 класса изучены два преобразования: параллельный перенос — построение графика функции $y = f(x + a) + b$ с помощью известного графика функции $y = f(x)$ — и осевая симметрия — построение графика функции $y = -f(x)$. В § 13 добавляются растяжение графика от оси абсцисс и построение графика функции $y = f(kx)$ по известному графику функции $y = f(x)$. Любой новый класс изучаемых функций и в учебнике, и в задачнике (речь идет не только о тригонометрических функциях, но и об изучаемых в главах 6 и 7 степенной, показательной и логарифмической функциях) «пропускается через сито» преобразований графиков.

4. Функциональная символика. Как только в 7 классе появилась запись $y = f(x)$, мы начали предлагать учащимся примеры, нацеленные на осознание смысла этой записи, — примеры на функциональную символику. Опыт показывает, что школьники часто не могут, например, исследовать функцию на четность не потому, что не знают определений четной или нечетной функции, а потому, что не понимают смысла записи $f(-x)$. Нередко учащиеся испытывают затруднения с производной из чисто технических трудностей: не понимают смысла записи $f(x + \Delta x)$ и вследствие этого даже в достаточно простых случаях не могут составить выражение для приращения функции. Это означает, что соответствующая работа не была проведена учителем в 7—9 классах. Поэтому мы в предыдущих учебных пособиях систематически предлагали задания следующего типа: для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$, найти: $f(1)$, $f(a)$, $f(a - 1)$, $f(3a)$, $f(5x)$, $f(-x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$ и т. д. Соответствующие примеры и упражнения имеются и в учебнике, и в задачнике по алгебре и началам математического анализа, о которых идет речь.

Следует отметить, что по мере изучения курса алгебры, начиная с 7 класса, рейтинги первого и третьего из указанных направлений (графическое решение уравнений, преобразование графиков) постоянно возрастают — соответствующие примеры встречаются регулярно и в качественном плане совершенствуются. В то же время рейтинги второго и четвертого направлений (отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, функциональная символика) снижаются — эти направления более важны в курсе алгебры 7—9 классов, причем прежде всего в пропедевтическом плане. Если эти направления в основной школе хорошо

отработаны, то в старшей школе они, естественно, менее значимы, особенно если учесть, что скоро в «бой» вступит «тяжелая артиллерия» — производная.

5. Кусочные функции. Для правильного формирования у школьников как самого понятия функции, так и представления о методологической сущности этого понятия, полезно делать то, что практически отсутствует в большинстве школьных учебников, о чем забывают и авторы многочисленных методических рекомендаций. Речь идет о рассмотрении кусочных функций, т.е. функций, заданных разными формулами на различных промежутках области определения. Во многих случаях именно кусочные функции являются математическими моделями реальных ситуаций. Использование таких функций способствует преодолению обычного заблуждения многих учащихся, отождествляющих функцию только с ее аналитическим заданием в виде некоторой формулы. Как известно, чтобы задать функцию, нужно указать область ее определения $D(f)$ и правило f , согласно которому каждому значению x из множества $D(f)$ сопоставляется определенное значение y . Если учащиеся имели дело с функциями, заданными аналитически одной формулой, заданными с помощью графика и, особенно, заданными разными формулами на различных промежутках, то они легче воспримут ту тонкость, которая содержится в определении («правило f »); менее вероятно при этом и отождествление ими «правила f » с «формулой f ». Использование кусочных функций готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане понятие непрерывности (а косвенно — и понятие предела). Использование на уроках кусочных функций дает возможность учителю сделать систему упражнений более разнообразной (что существенно для поддержания интереса к предмету у обучаемых) и творческой (можно предложить им самим придумывать примеры).

Если вы работали по нашим учебникам алгебры в 7—9 классах, то кусочные функции стали за три года общения с ними привычными и понятными для ваших учеников. Если вы работали по другим учебникам и совсем не использовали кусочные функции, то пример 1 из §1 будет для школьников первым примером построения графика кусочной функции, разберите его с ними неспешно и очень подробно.

6. Чтение графика. Очень важно научить детей по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной). Наличие в курсе алгебры и начал математического анализа достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным с литературной точки зре-

ния, а также многоплановым. Ученик должен уметь составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику.

При чтении графика мы обычно придерживаемся такого порядка ходов (он вырабатывался в наших учебниках постепенно, начиная с 7 класса):

- 1) область определения функции (заданная или естественная);
- 2) четность;
- 3) монотонность;
- 4) ограниченность;
- 5) наибольшее и наименьшее значения функции;
- 6) непрерывность;
- 7) область значений функции;
- 8) выпуклость.

Позднее добавятся свойства периодичности и дифференцируемости функции.

Если вы не работали по нашим учебникам в 7—9 классах, то у вас могут возникнуть вопросы по позициям 6) и 7) представленной схемы. Предупреждая эти вопросы, отметим, что непрерывность функции пока (до гл. 5) понимается в наглядно-интуитивном смысле («сплошность» графика). А область значений функции занимает непривычную предпоследнюю позицию (а не вторую, как делается во многих школьных учебниках) потому, что в большинстве случаев об области значений функции можно судить только по построенному графику с учетом перечисленных свойств 1) — 6).

Завершая разговор об инвариантном ядре, подчеркнем, что оно четко просматривается в параграфах задачника, посвященных изучению того или иного вида функций. Выделено оно и в серии примеров, разобранных в учебнике в §10, 11 и 14, посвященных изучению тригонометрических функций.

ТЕМА 3

Тригонометрические уравнения

В нашем курсе алгебры 7—11 классов из основных содержательно-методических линий в качестве приоритетной выбрана функционально-графическая линия. Это прежде всего выражается в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

По этой схеме строится весь раздел «Тригонометрия» — порядок глав именно такой; по этой же схеме строится изучение степенных, показательных и логарифмических функций в главах 6 и 7.

Между прочим, именно по отношению к тригонометрии эта схема вызывает у учителей, не знакомых с нашей концепцией, возражения. Как, спрашивают они, можно изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии? Серьезный вопрос требует серьезного ответа.

Почему в нашем курсе функции предшествуют преобразованиям? Ответим на этот вопрос с позиции здравого смысла: целесообразнее сначала изучить «чистые модели» (такowymi в математике являются основные элементарные функции), а затем уже переходить к изучению «навороченных моделей» (такowymi в математике являются сложные выражения, которые надо упрощать, применяя формульный аппарат). А как обстоит дело с тригонометрическими уравнениями? Примерно так же: сначала следует разобраться с «чистыми моделями», т.е. с простейшими тригонометрическими уравнениями и уравнениями, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов. И только потом переходить к «навороченным моделям», т.е. к уравнениям, которые нужно сначала долго и упорно «раскручивать», используя рутинный аппарат формул. Обычная методическая ошибка в изучении тригонометрии в школе в последние годы заключается в следующем: учащимся не дают возможности разобраться со спецификой собственно тригонометрических

уравнений — простейших уравнений типа $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. А ведь в этих уравнениях много нового и неожиданного: бесконечное множество корней, наличие параметра (n или k) в записи решений, новые символы (пресловутые «арки») и прочие «выкрутасы» (типа $(-1)^n$). Ко всему этому надо привыкнуть. В традиционных учебниках детям не дают этой возможности: уравнения практически сразу усложнены обилием тригонометрических формул и необходимостью выполнения соответствующих преобразований.

Теперь можно сформулировать концепцию всей главы 3 учебника и задачника: в этой главе изучаем только то, что даст возможность школьникам почувствовать именно специфику тригонометрических уравнений. Перечень составляют, во-первых, простейшие уравнения указанных выше видов; во-вторых, уравнения, при решении которых применяется метод введения новой переменной: однородные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным с помощью основного тригонометрического тождества, например, $\sin^2 x - 5 \cos x + 1 = 0$ (положив $u = \cos x$, получим $1 - u^2 - 5u + 1 = 0$ и т.д.).

В § 15—17 вводятся арккосинус, арксинус, арктангенс и арккотангенс. Схема построения указанных трех параграфов одна и

та же — это сделано для удобства читателя. Обратите внимание на два принципиальных обстоятельства.

Первое. В указанных параграфах реализуется классическая схема динамики и развития математического языка. Читатель попадает в нештатную ситуацию, для описания которой средств, имеющихся в математическом языке, недостаточно. Неясно, например, как математически описать точки числовой окружности, удовлетворяющие уравнению $\cos t = \frac{2}{5}$. Когда возника-

ет некий новый объект, которому в рамках данного языка нет наименования, то это наименование придумывают (классический пример — появление термина «компьютер»). Математический язык — не исключение, только здесь новые объекты — это новые математические модели. Им приходится придумывать не только новые наименования (новые термины), но и новые обозначения (а это уже специфика математического языка). Очень существенно довести до сознания ваших учеников, что «арккосинус» и \arccos — не прихоть математиков, а естественное продвижение (*новый термин, новое обозначение*) в освоении математического языка.

Второе. Мы не употребляем термин «обратные тригонометрические функции», поскольку они не предусмотрены стандартом для базового уровня. Ни в учебнике, ни в задачнике не встречаются примеры или упражнения, в которых речь идет о свойствах или графиках функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ (тогда как в нашем комплекте для профильной школы все это есть).

Обращаем ваше внимание на обозначение переменной, относительно которой в § 15—17 решаются тригонометрические уравнения. До тех пор, пока мы в своих рассуждениях опираемся на числовую окружность, мы, как неоднократно отмечалось выше, обозначаем переменную буквой t . Как только выходим на формальный уровень, т. е. на уровень использования готовых формул для решения простейших тригонометрических уравнений, мы возвращаемся к тому, к чему привыкли ученики, — к обозначению переменной в уравнении буквой x .

Для решения простейших тригонометрических уравнений типа $\sin x = a$, $\cos x = a$ и т. д. в учебнике фактически используется трехшаговый алгоритм:

- 1) составить общую формулу;
- 2) вычислить значение арксинуса (арккосинуса и т. д.);
- 3) подставить найденное значение в общую формулу.

Если сочтете целесообразным, можете на первых порах предложить этот алгоритм учащимся.

В § 18, заключительном параграфе главы 3, рассмотрены следующие виды тригонометрических уравнений (речь идет не толь-

ко о материале, включенном в учебник, но и о типах упражнений, имеющих в соответствующем параграфе задачника):

- базовые уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$;
- простейшие уравнения вида $\sin 3x = a$, $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = a$;
- квадратные уравнения относительно $\sin x$ или $\cos x$;
- однородные уравнения первой степени;
- однородные уравнения второй степени;
- уравнения, сводящиеся к однородному уравнению второй степени за счет применения основного тригонометрического тождества.

Рассмотрены также примеры на отбор корней в тригонометрических уравнениях. Как видите, и без использования тригонометрических формул есть чем заняться. Это ответ на часто встречающийся вопрос учителей, который мы привели в начале этой главы: как можно изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии?

Теперь ответим еще на один вопрос, который обычно беспокоит учителей особенно в начале изучения темы «Тригонометрические уравнения»: обязательно ли при записи разных серий решений тригонометрического уравнения использовать в качестве параметра различные буквы. Вернемся к уравнению $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$ (пример 3 б) из § 18). Мы свели его к совокупности уравнений $\cos x = 1$; $\cos x = -\frac{1}{2}$ и записали ответ в виде

$$x = 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

В качестве параметра использовалась одна и та же буква k . И это правильно. Но если бы мы записали ответ в виде

$$x = 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

то это тоже было бы верным. Здесь речь идет о совокупности уравнений, т. е. о независимых друг от друга уравнениях. Образно говоря, вы поручаете решение уравнений $\cos x = 1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ разным ученикам, при этом они не обязаны согласовывать записи ответов. А вот в системах тригонометрических уравнений дело обстоит иначе: там необходимо использовать разные обозначения для параметра в различных уравнениях системы, это носит принципиальный характер.

Весьма трудным в методическом плане является вопрос об отборе корней в тригонометрических уравнениях. Учащиеся не

должны формально заучивать формулы корней тригонометрических уравнений, они должны их «прочувствовать», понять, что корней бесконечно много, что все они зависят от целочисленного параметра. А для этого отбор корней, причем именно в простейших уравнениях, не обремененных техническими «формульными» сложностями, — наиболее благодатный материал. В §18 учебника разобран один подобный пример (пример 2) и, разумеется, такие примеры в достаточном (для базового уровня) количестве имеются в задачнике (и в существенно более значимом как в количественном, так и в качественном плане они представлены в нашем задачнике¹ для профильного уровня, которым при желании и соответствующих возможностях вы всегда сможете воспользоваться).

ТЕМА 4

Преобразование тригонометрических выражений

Глава 4 учебника посвящена выводу основных формул тригонометрии и показу многочисленных примеров их использования как для упрощения тригонометрических выражений, так и для осуществления вычислений в тригонометрии, для решения тригонометрических уравнений и т. д. Обратите внимание на то, что тригонометрические уравнения решаются постоянно, на протяжении всего периода изучения главы 4 отрабатывается техника их решения, в то время как все принципиальные вопросы, связанные с решением тригонометрических уравнений, подробно рассмотрены ранее, в главе 3.

В учебнике не приведено доказательство теоремы сложения. Существует довольно много разных способов ее доказательства, но они достаточно громоздки и технически трудны. Упрощенные варианты доказательства относятся лишь к частным случаям значений аргументов, например к случаю, когда аргументы — углы треугольника.

Приведем одно из доказательств теоремы сложения, пригодное для любых значений аргумента; при желании и возможности учитель может познакомить учащихся с этим доказательством.

Теорема сложения. Для любых значений аргументов t и s справедливы формулы:

$$\sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s,$$

$$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s.$$

¹ Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. — М.: Мнемозина, 2006—2009.

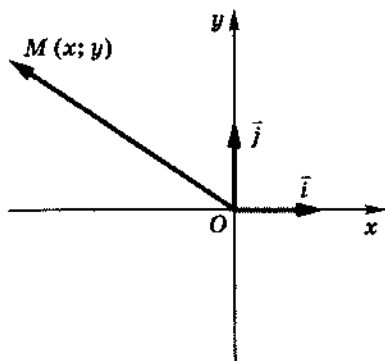


Рис. 2

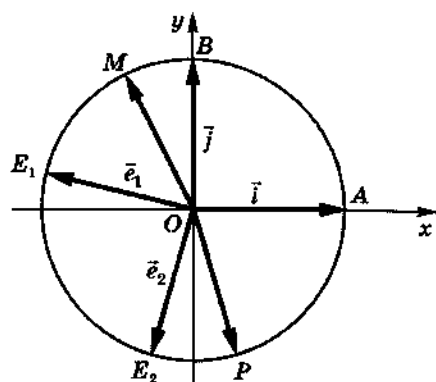


Рис. 3

Прежде чем доказывать эту теорему, подготовим один вспомогательный результат из векторной алгебры. Известно, что если в декартовой прямоугольной системе координат задана точка $M(x; y)$, то вектор OM разлагается по базисным векторам i, j единственным образом (рис. 2):

$$OM = xi + yj.$$

Если, в частности, M — точка числовой окружности: $M = M(t)$, то $M = M(\cos t; \sin t)$ и указанное разложение примет вид

$$OM = \cos t \cdot i + \sin t \cdot j, \quad (1)$$

где, как обычно, t — число, которому на числовой окружности соответствует точка M ; чтобы не обременять себя рассуждениями, связанными с неоднократным обходом числовой окружности, можно считать, что t — длина дуги AM (рис. 3). Если совокупность указанных трех векторов как жесткую конструкцию повернуть на любой угол в любую сторону вокруг точки O , то векторы, конечно, изменятся, но их связь друг с другом останется прежней (см. рис. 3):

$$OP = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2. \quad (2)$$

Здесь $e_1 = OE_1$, $e_2 = OE_2$ и OP — единичные векторы с общим началом O , угол между e_1 и e_2 равен 90° (в направлении против часовой стрелки), t — длина дуги E_1P .

Доказательство теоремы сложения.

1. Пусть M — точка числовой окружности, соответствующая числу t , K — точка числовой окружности, соответствующая числу $t + s$; тогда $AM = t$, $AK = t + s$, $MK = s$ (с точностью до 2π).

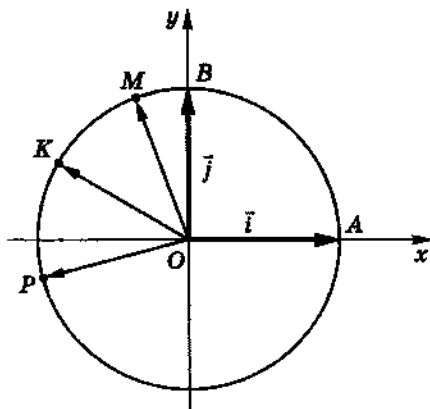


Рис. 4

Отметим на числовой окружности еще одну точку — точку $P\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 4). Разложим, воспользовавшись соотношением (1), векторы OM , OK и OP по векторам $i = OA$ и $j = OB$:

$$OM = \cos t \cdot i + \sin t \cdot j, \quad (3)$$

$$OK = \cos(t + s) \cdot i + \sin(t + s) \cdot j, \quad (4)$$

$$OP = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot i + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot j.$$

Воспользовавшись формулами приведения, последнее разложение можно переписать в виде

$$OP = -\sin t \cdot i + \cos t \cdot j. \quad (5)$$

2. Воспользовавшись соотношением (2), разложим вектор OK по векторам OM и OP :

$$OK = \cos s \cdot OM + \sin s \cdot OP. \quad (6)$$

3. Подставим в соотношение (6) вместо OM разложение (3), а вместо OP разложение (5). Получим:

$$\begin{aligned} OK &= \cos s (\cos t \cdot i + \sin t \cdot j) + \sin s (-\sin t \cdot i + \cos t \cdot j) = \\ &= (\cos t \cos s - \sin t \sin s) \cdot i + (\sin t \cos s + \cos t \sin s) \cdot j. \end{aligned}$$

Итак, получили, что

$$OK = (\cos t \cos s - \sin t \sin s) \cdot i + (\sin t \cos s + \cos t \sin s) \cdot j.$$

4. Сравнив два разложения вектора OK по векторам i и j — последнее равенство и соотношение (4) — и воспользовавшись единственностью разложения, приходим к выводу, что:

$$\cos t \cos s - \sin t \sin s = \cos(t + s),$$

$$\sin t \cos s + \cos t \sin s = \sin(t + s).$$

Если у вас будет время и желание познакомить с этим доказательством школьников, то примите совет: приведите доказательство в конце изучения § 19. Пусть они сначала привыкнут к этим формулам, увидят многообразие их применения. Обратите внимание на то, что в § 20 доказательство формулы тангенса суммы также перенесено в конец параграфа. Мы хотим, чтобы ученик привык самостоятельно читать учебник. Но если в начале параграфа ему встречается технически сложное доказательство, то он может закрыть книгу и не увидеть главного — образцов применения полученных формул. Поэтому мы предпочитаем сначала показать учащимся, как работают соответствующие формулы.

По большому счету не следует заставлять школьников заучивать формулы тригонометрии. Пусть эти формулы постоянно висят в кабинете математики в виде соответствующих таблиц (можно для этой цели использовать имеющийся в учебнике материал в конце главы 4). Наиболее важные формулы они постепенно запомнят без всякого принуждения.

Между прочим, учителя математики не очень склонны поддерживать вышеприведенный тезис. А как же, спрашивают они, ученики будут сдавать экзамены, где пользоваться шпаргалками не разрешено. Это на самом деле очень серьезный вопрос, но ответ на него очевиден. Если ваша основная цель — подготовка к экзамену, то вы будете заставлять учащихся заниматься бессмысленным зазубриванием. Если же ваша основная цель — обучение и развитие, то вы откажетесь от бессмысленной зубрежки. Но когда придет время непосредственной подготовки к экзамену, скажите своим питомцам примерно следующее: «На экзаменах свои правила. Половину формул тригонометрии вы уже выучили в процессе их непосредственного использования, знаете, как структурированы основные формулы, когда и как они применяются, оценили их важность. Но на экзаменах не разрешается использовать наглядные пособия и подручные средства, так что включайте память».

Завершая разговор о формулах тригонометрии, обсудим еще один существенный вопрос: как помочь учащимся при решении конкретного достаточно сложного примера (тригонометрического тождества, тригонометрического уравнения и т. д.) осуществить удачный начальный выбор той или иной формулы. Один рецепт не вызывает сомнения: если можно использовать формулы приведения, то с этого и следует начать. А как быть в иных случаях? Оказывается, в тригонометрии действуют три «тупых закона» (в том смысле, что их бездумное применение часто оказывается путеводной звездой решения примера).

Закон № 1: увидел сумму — делай произведение.

Закон № 2: увидел произведение — делай сумму.

Закон № 3: увидел квадрат — понижай степень.

Удивительно, но если вы не знаете, за что «зацепиться», с чего начинать преобразование сложного тригонометрического выражения, начинайте с использования одного из этих законов и в большинстве случаев (по крайней мере на школьном уровне) все пройдет удачно.

Приведем в качестве иллюстрации решение уравнения $\cos^2 x + \sin^2 3x = 1$. Применим закон № 3: увидел квадрат — понижай степень. Получим:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1$$

и далее

$$\cos 2x - \cos 6x = 0.$$

Применим закон № 1: увидел сумму — делай произведение. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos 6x &= -2 \sin \frac{2x + 6x}{2} \sin \frac{2x - 6x}{2} = \\ &= -2 \sin 4x \sin(-2x) = 2 \sin 4x \sin 2x. \end{aligned}$$

Следовательно, задача сводится к решению уравнения $2 \sin 4x \sin 2x = 0$.

$$\text{Имеем: } \sin 4x = 0, x = \frac{\pi n}{4}; \sin 2x = 0, x = \frac{\pi n}{2}.$$

Объединив найденные серии решений, получим: $x = \frac{\pi n}{4}$.

ТЕМА 5

Производная

Концепция изучения в школе элементов математического анализа

Предел, производная, интеграл... Должны эти понятия включаться в программу школьного курса математики или нет? Если должны, то зачем, в чем их воспитывающая и развивающая ценность для учеников? Если должны, то в каком объеме и на каком уровне строгости излагать их в школьных учебниках и на уроках алгебры и начал математического анализа? Эти три вопроса в последнее время постоянно находятся в зоне повышенного внимания педагогической общественности.

Попробуем ответить на *первый и второй вопросы*: нужны ли современному школьнику элементы математического анализа, зачем они ему?

В методике преподавания математики есть три ключевых вопроса: *что преподавать, как преподавать, зачем преподавать?* Главный из этих вопросов — последний, но именно он долгое время был не самым актуальным. Оно и понятно: в авто-

ритарном обществе (в котором все мы так долго жили) не обсуждают *зачем*, обсуждают только *что* и *как*. В современном обществе на первое место выходит вопрос *зачем*.

Если в недавние годы социальный заказ нацеливал педагогическую общественность на то, что главное в образовании — обучение, передача информации, то сегодня социальный заказ заключается в том, что главное в образовании — развитие. Поэтому если раньше учили *математике*, то сегодня учат *математикой* (это, конечно, полемическое передегиривание, точнее будет сказать так: надо учить *математике* и *математикой*).

Ниже мы несколько раз будем ссылаться на академика В. И. Арнольда. Доклад одного из крупнейших математиков современности «Жесткие и мягкие математические модели» (сент. 1997 г.) содержит важные мысли о проблемах математического образования. По его мнению, основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Значит, нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций (что как раз и является стержневой идеей нашего курса алгебры 7—11 классов), а для этого они должны владеть математическим языком, описывающим указанные модели. Для математического исследования явлений реального мира особо значимыми оказываются понятия предела и производной, так как это — основные понятия того языка, на котором говорит природа, определенный золотой фонд общечеловеческой культуры. Безусловно, выпускник средней школы должен иметь представления о пределе и производной, об их применении для исследования реальных процессов. В то же время относительно первообразной и интеграла такой уверенности у нас нет, элементы интегрального исчисления присутствуют в нашем учебнике (и в задачнике) только потому, что они есть в государственной программе.

Обсудим *третий вопрос*: каким должен быть уровень строгости в предъявлении школьнику элементов математического анализа?

Сейчас почти никто не оспаривает тезис о том, что школьная математика не наука, а учебный предмет со всеми вытекающими отсюда последствиями. В учебном предмете не обязательно соблюдать законы науки математики (например, такие: все начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основного понятия, все утверждения надо доказывать и т. п.), зачастую более существенны законы педагогики и особенно — психологии. Опираясь на этот тезис, начнем с обсуждения очень трудного вопроса, который мучает и учителей, и авторов учебников, и составителей программ, и ученых-математиков, методистов, педагогов: что делать в школе с понятием предела.

Были разные варианты: от использования в школе формального определения предела до попытки вообще запретить упоминание самого термина «предел». Как всегда, крайние позиции целесообразно отбросить и обсудить проблему с научно-методической и психолого-педагогической точек зрения.

Почему попытка введения в школе строгого определения предела была *a priori* обречена на провал?

Во-первых, надо учесть, что и в истории математики формирование понятия предела шло болезненно и туго. Пределами пользовались на наглядно-интуитивном уровне за много веков до введения формального определения, предложенного О. Коши в начале XIX в. Это не случайно, ведь в обычном « $\varepsilon - \delta$ определении» того, что число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f): 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon),$$

заложено внутреннее противоречие: на статическом языке (на языке неравенств) описана динамическая ситуация (процесс приближения к предельному значению). Этого долго не могли постичь математики, чего уж требовать от обычных учеников.

Во-вторых, следует упомянуть об измерении уровня сложности определений математических понятий. Один из способов измерения связан с числом кванторов в определении. Например, понятие четности функции — однокванторное: для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$; в определении присутствует только один квантор общности — «для любого». Понятие ограниченности функции сверху — двухкванторное: *существует* число M такое, что *для всех* $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) < M$; в этом определении присутствуют два квантора: квантор существования \exists и квантор общности \forall . Однокванторное определение посильно среднему школьнику, двухкванторное (ограниченность, экстремум, наибольшее и наименьшее значения функции, периодичность функции) требует напряжения его умственных сил и вдумчивой, неспешной работы учителя; это, объективно, та планка, выше которой в общеобразовательной школе не прыгнуть. А теперь взгляните на приведенное выше формальное определение предела — это определение с тремя кванторами, т. е. по нашей условной иерархии определение третьего уровня сложности, не говоря уже о его перегруженности знаками модулей и неравенств.

Итак, совершенно очевидно, что учащемуся в силу его возрастных особенностей и недостаточной математической культуры не по силам трехкванторное определение предела. Значит, в школе следует отказаться от *жесткой модели* (формальное определение), заменив ее *мягкой моделью* — интуитивным представлением о пределе.

В началах математического анализа есть три вида предела: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности и предел функции в точке. Предел функции на бесконечности в российской общеобразовательной школе в последние годы почти не рассматривается, упоминается (и то, как правило, очень невнятно) лишь предел в точке. На наш взгляд, начинать следует (после разговоров о пределе последовательности, чему посвящен § 24) именно с предела на бесконечности. Это диктуется дидактическими соображениями: если опираться на такие принципы дидактики, как связь с жизнью, связь с имеющимся опытом, то придется согласиться, что понятие предела в точке не имеет дидактической подоплеки, в то время как с пределом на бесконечности в этом смысле все в порядке. Например, процесс остывания нагретого чайника до комнатной температуры моделируется с помощью предела на бесконечности. Учащимся знакомо понятие горизонтальной асимптоты, а наличие у графика функции горизонтальной асимптоты — это геометрическая модель предела функции на бесконечности.

В § 26 упоминаются теоремы об арифметических операциях над пределами, рассматриваются несложные примеры на их вычисление. Но не это главное. Главное, чтобы учащиеся могли геометрически интерпретировать запись $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, как существование

у графика функции $y = f(x)$ горизонтальной асимптоты $y = b$, и, наоборот, глядя на график функции, имеющей горизонтальную асимптоту, переходить к аналитической модели (с использованием символа предела). Важно научить их конструировать эскизы графиков функций с заданными свойствами, например: построить график функции $y = f(x)$, для которой $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, причем функция непрерывна и убывает на всей числовой прямой (рис. 5).

Вообще любое сколько-нибудь сложное математическое понятие должно постепенно изучаться в учебном процессе: сначала на наглядно-интуитивном уровне, потом на рабочем (описатель-

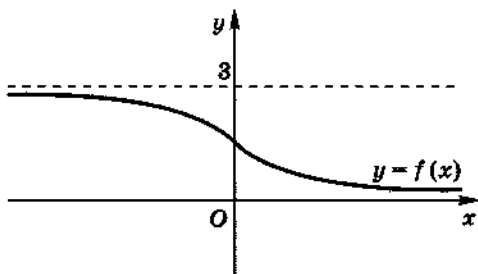


Рис. 5

ном) уровне и только после этого можно выходить на формальный уровень. Так обстоит дело в нашем курсе алгебры 7—11 с понятием функции и практически со всеми изучаемыми в школе свойствами функций (особенно двухкванторными). С понятием предела мы в школе на формальный уровень не выходим. Определение предела числовой последовательности дается в §24 сначала на наглядно-интуитивном, а затем на рабочем уровне. Определения же предела функции как на бесконечности (§26, п. 1), так и в точке (§26, п. 2) остаются на наглядно-интуитивном уровне.

При изучении производной основное внимание следует уделить модели $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ее геометрическому и физическому истолкованию (этому посвящен §27, но первые представления о приращении аргумента, приращении функции и о пределе их отношения даны в опережающем режиме уже в конце §26). Вряд ли есть смысл делать акцент на отработку умений вычислять производную — это довольно бесполезное занятие, осуществляемое по готовым рецептам, ничего не дающим для развития. Гораздо важнее научить их «видеть» приложения производной, опираясь на геометрические иллюстрации, именно «видеть», а не пытаться их формально доказывать, тем более что в школе попытки строгих доказательств, скажем, теоремы о том, что если $y' > 0$, то функция возрастает, или теоремы о необходимых условиях экстремума, обречены на провал. Для этого нужны теоремы Ферма и Лагранжа, которые в общеобразовательной школе строго доказать все равно не удастся; вводить же их без доказательства, опираясь на геометрические иллюстрации, чтобы потом применять только для доказательства указанных выше теорем, нецелесообразно, — лучше использовать интуицию и наглядность непосредственно для нужных теорем. Но учащиеся должны знать, что мы лишь знакомим их с элементами математического анализа (имеющими большое общекультурное значение), что большинство проводимых рассуждений не претендуют на формальную строгость, а являются лишь правдоподобными рассуждениями, что строгие доказательства будут даны в вузе.

В. И. Арнольд в упомянутой выше брошюре пишет: «Наш мозг состоит из двух полушарий. Левое отвечает за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов, а правое — за пространственную ориентацию, интуицию и все, необходимое в реальной жизни. У «математиков-исчислителей»... гипертрофированно левое полушарие, обычно за счет недоразвития правого... Доминирование математиков этого типа и привело к тому засилью аксиоматическо-схоластической математики, особенно в преподавании (в том числе и в средней школе), на которое общество естественно и законно реагирует резко отри-

цательно. Результатом явилось повсеместно наблюдаемое отвращение к математике и стремление всех правителей отомстить за перенесенные в школе унижения ее уничтожением. Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга». И последняя цитата: «Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики».

Итак, *первый лозунг*: меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга! *Второй лозунг*: больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга! Преподавать в постоянном режиме жесткого моделирования легко — не надо думать ни о целеполагании, ни о мотивации, ни о пропедевтике, ни о психолого-педагогических законах обучения и развития. Использовать же в преподавании режим мягкого моделирования трудно — это требует от учителя творческого подхода. В нашем учебнике превалирует режим мягкого моделирования.

Методические особенности изложения элементов дифференциального исчисления

Первые два параграфа главы 5 (§ 24 и 25) посвящены последовательностям. Здесь существенны три момента, и именно на них советуем сделать упор в обучении. Во-первых, понятие предела последовательности интуитивно воспринимается учащимися легче, чем понятие предела функции непрерывного аргумента, что целесообразно использовать при первом знакомстве с теорией пределов. Во-вторых, открывается возможность показа им важной и новой для них математической модели — бесконечной суммы (т.е. числового ряда) — на примере суммы бесконечной геометрической прогрессии. В-третьих, закладывается теоретическая база для введения (в главе 7) тонкого понятия степени с иррациональным показателем. Она представляет собой совокупность следующих фактов, сформулированных в учебнике:

- 1) если $0 < a < 1$, то последовательность (a^n) убывает;
- 2) если $a > 1$, то последовательность (a^n) возрастает;
- 3) если последовательность сходится, то только к одному пределу;
- 4) если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (*теорема Вейерштрасса*).

Первые два факта комментариев не требуют. Теорему Вейерштрасса в школе доказать нельзя. Что же касается теоремы о единственности предела, то при желании (а главное, при наличии времени) доказать ее в классе можно, причем достаточно строго и изящно. Приведем это доказательство.

Предположим, что последовательность (y_n) имеет два различных предела: $\lim y_n = b$ и $\lim y_n = c$, причем $b \neq c$, например $b < c$. Возьмем две непересекающиеся окрестности точек b и c (рис. 6). Так как b — предел последовательности, то вся последовательность, начиная с некоторого номера n_1 , попадает в окрестность точки b . Так как c — предел последовательности, то вся последовательность, начиная с некоторого номера n_2 , попадает в окрестность точки c . Пусть n_0 — наибольшее из чисел n_1, n_2 .

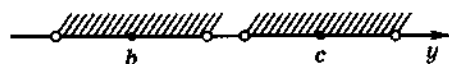


Рис. 6

Тогда получается, что, начиная с номера n_0 , вся последовательность содержится одновременно и в окрестности точки b , и в окрестности точки c . А это невозможно, поскольку окрестности мы с

самого начала выбрали непересекающимися. Наше предположение неверно, следовательно, двух разных пределов у последовательности быть не может.

Подчеркнем, что приведенное доказательство — классика математического анализа.

Об уровне предъявления учащимся понятий предела функции на бесконечности и в точке, чему посвящен § 26, мы уже говорили ранее. И вновь подчеркнем полезность примеров на конструирование геометрических моделей функций с заранее заданными свойствами, включая существование предела. Приведем пример одного из таких рекомендуемых заданий (аналогичные упражнения есть в задачнике). Построить график функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами:

- а) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$; в) $f(3)$ не определено; г) $f(0) = 7$ (одна из возможных графических моделей представлена на рис. 7).

В школе для вычисления $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ достаточно знать три обстоятельства (все они в той или иной степени упомянуты в учебнике).

1. Все функции, которые встречаются в школьном курсе математики (рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические), непрерывны в любой точке, в которой они определены. Иными словами, если $f(a)$ существует, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (см. примеры 3 и 4 в § 26).

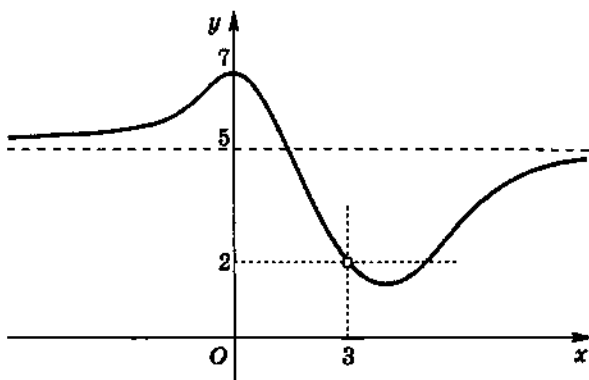


Рис. 7

2. Если надо вычислить

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } g(a) = 0,$$

то в случае, когда $f(a) \neq 0$, пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

прямая $x = a$ является в этом случае вертикальной асимптотой графика функции

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3. Если и $f(a) = 0$, и $g(a) = 0$ (в математическом анализе этот случай называют обычно «неопределенность вида $\frac{0}{0}$ »), то чтобы вычислить

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

нужно выполнить тождественные преобразования выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$.

В простейших случаях неопределенность исчезает в момент сокращения дроби (см. пример 5 в § 26).

Весьма существенным в плане продвижения учащихся в освоении математического языка является п. 3 § 26, где проведена вся подготовительная работа по конструированию основной модели — производной. Вводятся понятия приращения аргумента и приращения функции, обозначения Δx , Δy , $x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и даже

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ для функций } y = kx + m \text{ и } y = x^2,$$

т. е. фактически опережающим образом выведены формулы для вычисления производных указанных функций (естественно, без упоминания термина и обозначения производной). Заметим, что аналогичные упражнения имеются и в соответствующем параграфе задачника.

Ключевое положение в главе 5 занимает § 27 «Определение производной». Он начинается с двух классических задач — задачи о скорости и задачи о касательной, — процесс решения которых приводит к новой математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. В учебнике вскользь сказано о том, что многие задачи из других областей знаний приводят в процессе решения к такой же модели. При возможности следует наполнить эту мысль конкретным содержанием. Приведем два физических примера.

1) Если закон изменения количества электричества выражается формулой $Q = Q(t)$, где t — время, и если через поперечное сечение проводника за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ проходит количество электричества ΔQ , то $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ — средняя сила тока, а мгновенная сила тока в момент времени t выражается формулой

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

2) Если закон распределения массы в линейном неоднородном стержне выражается формулой $m = m(l)$, где l — длина части стержня от начальной до текущей точки, и если на участке $[l; l + \Delta l]$ длины Δl сосредоточена масса Δm , то $\frac{\Delta m}{\Delta l}$ — средняя плотность распределения массы, а линейная плотность в точке l выражается формулой

$$\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}.$$

Принципиальное методологическое значение имеет вывод, который делает учитель на основании рассмотрения конкретных задач. Различные задачи из разных областей знания приводят к одной и той же математической модели. А что такое математика? Это наука о математических моделях. Значит, если жизнь выдвигает на повестку дня новую модель, дело математиков специально заняться изучением этой новой модели в отрыве от ее конкретного содержания. Заняться изучением новой модели означает, что нужно: 1) присвоить ей новый термин; 2) придумать для нее новое обозначение; 3) изучить правила оперирования с новой моделью и сферу ее приложения. Для рассматривае-

мой модели используется термин *производная* и обозначение y' , а правила оперирования и сфера приложения модели изучаются в нашем учебнике в последующих параграфах.

Между прочим, эта идея о появлении и изучении новой математической модели эксплуатируется в нашем учебнике не один раз. Примерно так же и теми же словами описана ситуация в § 15, когда возникла необходимость в появлении символа аггрос (советуем вам в связи с этим перечитать соответствующий абзац из наших комментариев к § 15 в теме 3); в § 33, когда вводится понятие корня n -й степени из действительного числа; в § 41, когда вводится понятие логарифма; в § 49, когда вводится понятие и обозначение для определенного интеграла. Все это служит подтверждением мысли о том, что в учебнике реализована развивающая концепция математического моделирования и математического языка.

В п. 2 § 27 приведен пятишаговый алгоритм отыскания производной функции $y = f(x)$, которым мы затем неоднократно пользуемся в учебнике. Сделаем два существенных комментария к нему.

1. Первый шаг алгоритма выглядит так: «зафиксировать значение x , найти $f(x)$ ». Казалось бы, этот шаг не нужен (во многих школьных учебниках его нет), поскольку и в самом задании содержится $f(x)$, и здесь используется та же запись $f(x)$. На самом деле этот шаг очень важен как с методологической точки зрения (записи $f(x)$ в исходном задании и на первом шаге одинаковы по форме, но не по содержанию: в исходном задании x — переменная, а на первом шаге алгоритма — постоянная), так и с психолого-педагогической — это этап сосредоточения на задаче, вхождения в процесс решения.

2. Нельзя допускать, чтобы понятия приращения аргумента и приращения функции появились впервые при введении производной, ведь здесь указанные понятия не цель, а средство для усвоения нового понятия (производной). Поэтому мы и ввели указанные термины и «странные» обозначения с треугольником около переменной со «странным» прочтением («дельта икс») в предыдущем параграфе, чтобы учащиеся успели приобрести хотя бы небольшой опыт нахождения Δy , Δx , $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и даже предела последнего отношения.

Завершая разговор о § 27, прокомментируем заключительные три абзаца этого параграфа. Выше мы уже говорили о том, что очень важно научить школьников по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной). Наличие в курсе алгебры и начал математического анализа достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным,

разнообразным с литературной точки зрения и многоплановым. Ученик должен уметь составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику. Мы постоянно приучали его видеть по графику область определения функции, ее четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывность, область значений функции, выпуклость. Было бы неплохо научить учащихся снимать с графика функции и информацию о ее дифференцируемости.

Как на глазок определить, дифференцируема ли функция, график которой изображен на конкретном рисунке? Ответ на этот вопрос как раз и дается в конце § 27. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную (иногда в таких случаях говорят о «гладкости» линии, изображающей график функции, и хотя с точки зрения формальных результатов математического анализа это не совсем точно, в школе этот термин при желании можно употреблять), не параллельную оси ординат, то функция дифференцируема в точке. Если же мы имеем «точку стыка», «точку заострения» или точку, в которой касательная к графику параллельна оси ординат, то в этой точке производная функции не существует, функция недифференцируема.

В § 28 разработан технический аппарат для оперирования с новой моделью — речь идет о формулах и правилах вычисления производных. Обращаем ваше внимание на то, что набор формул дифференцирования пока крайне узок, он включает в себя всего 8 формул для отыскания производных функций $y = f(x)$, где $f(x) = C, x, kx + m, x^2, \frac{1}{x}, x, \sin x, \cos x$. В этом же параграфе, но позднее, добавятся формулы дифференцирования для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, а также для функции $y = x^n$ ($n \in N$). Традиционно на учеников сразу обрушивают все формулы, включая производные степенных, показательных и логарифмических функций. На наш взгляд, это нежелательно, за обилием формул они перестанут видеть главное — исходную математическую модель. В нашем курсе производная степенной функции появится в главе 6, а производная показательной и логарифмической функций — в главе 7. Это позволит в соответствующих местах курса повторить формулы и правила дифференцирования и, что особенно существенно, применения производной.

Советуем обратить внимание учащихся на то, что есть *формулы* дифференцирования (для конкретных функций) и есть *правила* дифференцирования (дифференцирование операций сложения, умножения, деления). Следите за тем, чтобы ваши ученики не говорили «правило дифференцирования функции $y = x^2$ » или «формула дифференцирования суммы»; обратите их внимание также на то, что при вычислении производных мы

фактически используем двухшаговый алгоритм: сначала применяем то или иное *правило дифференцирования*, а затем используем нужные *формулы*.

Из известных правил дифференцирования одно в учебнике отсутствует — правило дифференцирования сложной функции; имеется лишь его частный случай — правило дифференцирования функции вида $y = f(kx + m)$. В программе общеобразовательной школы на базовом уровне нет пункта о дифференцировании сложной функции, что мы как авторы и как преподаватели педвуза, много лет читающие курс математического анализа студентам, приветствуем. Это — обычная рутина, тренировка памяти и не более того, без этого в школе можно обойтись.

Продолжая обсуждение методических особенностей § 28, обратим ваше внимание еще на три обстоятельства.

Первое обстоятельство. Формулы дифференцирования функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ сообщаются читателю в самом начале параграфа, а доказываются в конце. Это — элементарная педагогическая уловка, о которой мы уже упоминали выше на с. 33 («метод отсроченного доказательства»). Нам всем необходимо, чтобы учащиеся приобщались к чтению учебной литературы. Для этого следует создать им комфортные условия, выражающиеся как в довольно мягкой манере подачи материала, так и в том, чтобы достаточно сложные вещи не появлялись в начале параграфа, не отпугивали их. Поэтому в целом ряде мест учебника мы поступаем так же: сообщаем некоторый факт, приводим примеры его использования (чтобы читатель привык к новому факту и приобрел некоторый положительный опыт его использования) и только потом приводим соответствующее доказательство.

Второе обстоятельство. Обратите внимание на блочный характер построения системы упражнений в соответствующем параграфе задачника: сначала предлагается серия упражнений, где требуется найти производную заданной функции, затем значение производной в конкретной точке, потом мгновенную скорость, далее угловой коэффициент касательной, впоследствии угол между касательной к графику функции в заданной точке и осью абсцисс. Так же обстоит дело в последующих параграфах, где изучается производная степенной функции (§ 38) и производная показательной и логарифмической функций (§ 47).

Третье обстоятельство. Примеры, связанные с касательной к графику функции, полезно начинать решать до того, как выведено общее уравнение касательной (точно так же, как упражнения на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции следует решать в курсе алгебры 7—9 классов, естественно, без использования производной, что мы и делали в наших учебниках и задачниках). Это даст возможность учащимся достаточ-

но хорошо прочувствовать геометрический смысл производной и подготовиться к выводу уравнения касательной в общем виде. С этой целью и приведен пример 2 в § 28, где требуется составить уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x = 1$ (аналогичные упражнения имеются и в соответствующем параграфе задачника). Кстати, в начале следующего параграфа, где выводятся уравнение касательной, внимание учащихся как раз и обращается на то, что некоторый опыт проведения касательных и составления уравнений касательных ими уже накоплен.

Несколько слов о § 29. Обратите внимание на то, что в учебнике, вопреки сложившейся традиции, абсцисса точки касания обозначается не x_0 , а буквой a . Это, конечно, не очень существенно, но полезно в более сложных случаях, когда абсцисса точки касания неизвестна и она фактически выступает в роли параметра.

В учебнике и задачнике вы найдете основные стандартные сюжеты, связанные с задачами на касательную:

- составление уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику;
- проведение касательной параллельно заданной прямой;
- отыскание угла, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс.

§ 30 посвящен исследованию функций с помощью производной. Эта тема — своеобразная лакмусовая бумажка, с помощью которой проверяется методическая культура учителя математики. Ведь здесь речь идет о теоремах, необходимость знания которых по существу и явилась решающей причиной введения элементов математического анализа в школьный курс математики. В то же время их строгое доказательство требует знания многих фактов математического анализа, которые в школе не рассматриваются. Какой путь выбрать учителю: сообщить теоремы без доказательства и без комментариев, ограничиться наглядно-интуитивными представлениями и правдоподобными рассуждениями, попытаться дать строгие доказательства?

В учебниках и учебных пособиях для общеобразовательной школы встречаются различные варианты. Например, такой: без доказательства, но с опорой на графические иллюстрации формулируется теорема Лагранжа, а затем с ее помощью строго доказывается теорема о связи знака производной с характером монотонности функции на промежутке. С нашей точки зрения, это — не лучший вариант, он нелогичен (а по большому счету неконцептуален): зачем давать геометрическую иллюстрацию теоремы Лагранжа, если можно сразу дать геометрическую иллюстрацию того, что для школы существеннее — связи между знаком производной и характером монотонности функции? Иногда возражают, говоря, что теорема Лагранжа важна сама по себе, ведь недаром ее называют

основной теоремой дифференциального исчисления. Это верно, но лишь при условии, что она активно работает (как в вузовском курсе математического анализа). В школе же она используется лишь один раз — в указанном выше случае. К чему же ломать копыя?

Второй вариант, который используется в учебных пособиях: заменяют строгие доказательства правдоподобными рассуждениями, основанными на физическом или геометрическом смысле производной. С нашей точки зрения, это вполне приемлемо, но лишь при условии, что правдоподобные рассуждения не выдаются за доказательства (что, к сожалению, сплошь и рядом встречается) — такая подмена понятий наносит значительный ущерб формированию математической культуры школьника.

Именно второй вариант с указанным дополнительным условием и составляет концептуальную основу § 30. Текст этого параграфа вряд ли понравится ревнителям математической строгости, они объявят изложение материала легковесным. Авторы это не беспокоит. Главное, чтобы изложение нравилось учителям, было доступно учащимся (и их родителям) и фактологически не противоречило математике как науке. Давайте не забывать, что в школе мы лишь знакомим учащихся с элементами математического анализа, составляющими существенную часть общечеловеческой культуры, формальное изучение этого предмета — удел высшей математики, изучаемой в вузах (что неоднократно подчеркивается в учебнике).

В § 31 упоминается общая схема исследования свойств функции и построения ее графика, выработанная в курсе математического анализа (для достаточно сложных случаев, поэтому в школе мы ее во всей полноте не берем). Приведем эту схему.

1. Область определения функции.
2. Исследование функции на периодичность.
3. Исследование функции на четность.
4. Нули функции, точки разрыва, промежутки знакопостоянства.
5. Исследование поведения функции у концов промежутков области определения, отыскание асимптот.
6. Исследование функции на экстремумы и монотонность.
7. Построение графика функции по точкам (с учетом результатов проведенного исследования).

Поясним внутреннюю логику этой схемы. В пп. 1—4 фактически дается ответ на вопрос, *где* следует строить требуемый график; в пп. 5 и 6 дается ответ на вопрос, *как* строить график. Если мы знаем, где и как строить график, то остается лишь выполнить само построение (п. 7).

В § 32 речь идет об отыскании наибольших и наименьших значений функций. За годы изучения курса алгебры в школе по

нашим учебникам и задачникам ученики накопили достаточный опыт отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы решали эту задачу с помощью графика функции. В некоторых случаях могли найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. В более сложных случаях для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции используется производная. Эту мысль, высказанную в начале параграфа, следует довести до учащихся; они должны понимать, что производная в данном случае — не панацея, а лишь одно из возможных средств для достижения цели (далее мы еще раз вернемся к этому).

Наибольшую трудность у учащихся вызывают задачи на оптимизацию. Мы предлагаем решать их по обычной схеме — в виде трех этапов математического моделирования: составление математической модели, работа с моделью, ответ на вопрос задачи, — к чему школьники, учившиеся по нашим учебникам и задачникам в 7—9 классах, привыкли. Обратите внимание, что в учебнике для каждого из этапов даны некоторые рекомендации методического плана. Приведем их здесь и снабдим дополнительными комментариями.

Первый этап. Составление математической модели.

1) Проанализировав условие задачи, выделите *оптимизируемую величину*, т.е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S , V , R , t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить оптимизируемую величину, примите за *независимую переменную* и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите реальные границы изменения независимой переменной (в соответствии с условиями).

3) Исходя из условий, выразите y через x . Математическая модель задачи будет составлена, если вы получите аналитическое выражение функции $y = f(x)$ и укажете область ее определения X , которую нашли на втором шаге.

Второй этап. Работа с составленной моделью.

4) Для функции $y = f(x)$, $x \in X$, найдите $y_{\text{наим}}$ или $y_{\text{наиб}}$ (в зависимости от того, что требуется в условии).

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

5) Здесь следует получить конкретный ответ на вопрос задачи (используя термины и фабулу, заложенные в условиях), опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Прокомментируем пять шагов предложенного плана.

Первый шаг плана не такой очевидный, как может показаться на первый взгляд. Задача иногда может быть сформулирова-

на так, что не очень понятно, о какой оптимизируемой величине идет речь (хотя обычно все бывает сразу ясно: найти наибольший объем, найти наибольшую площадь, определить наименьшее время и пр.).

Четвертый шаг плана — это самостоятельная чисто математическая задача внутри исходной задачи с реальным содержанием. На этом шаге исходная реальная ситуация нас не интересует (что типично для второго этапа математического моделирования), мы думаем только об отыскании $y_{\text{наиб}}$ или $y_{\text{наим}}$ для функции, составленной на третьем шаге, на промежутке реальных границ изменения независимой переменной, найденном на втором шаге. Естественно, что чаще всего $y_{\text{наиб}}$ или $y_{\text{наим}}$ находится с помощью производной. Но ваши ученики не должны думать, что это закон; для нарушения стереотипа мышления неплохо было бы показать им один-два примера, где наибольшее или наименьшее значения функции можно найти без производной, с помощью элементарных алгебраических или геометрических рассуждений. Вот одна из таких задач.

Задача. Из всех треугольников с данным основанием a и данным углом α при вершине найти треугольник с наибольшей биссектрисой, проведенной к основанию.

Решение. *Первый способ (аналитический).*

1. Оптимизируемая величина — длина биссектрисы AD (рис. 8); обозначим ее буквой y .

2. Объявим независимой переменной угол C , обозначим его буквой x ; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < \pi - \alpha$.

3. По теореме синусов (для треугольника ABC) имеем:

$$\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin \alpha}, \text{ значит, } AB = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}.$$

Теперь применим теорему синусов к треугольнику ABD :

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin D}.$$

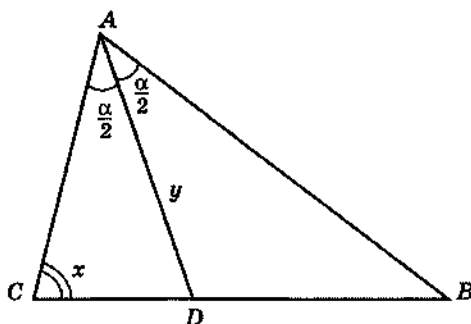


Рис. 8

Отсюда находим, что

$$y = \frac{a \sin x \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

4. Для функции

$$y = \frac{a \sin x \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

надо найти $y_{\text{наиб}}$ на интервале $(0; \pi - \alpha)$. Это сопряжено с определенными техническими трудностями (например, связанными с дифференцированием функции, с решением соответствующего тригонометрического уравнения).

Второй способ (геометрический). Пусть ABC — один из треугольников с заданным основанием и заданным углом при вершине (рис. 9). Опишем около него окружность, тогда вершины всех треугольников с основанием a и углом α при вершине лежат на дуге BAC ; один из таких треугольников — равнобедренный, обозначим его BA_1C . Проведем биссектрису AD треугольника ABC и биссектрису A_1D_1 треугольника BA_1C . Докажем, что $A_1D_1 > AD$.

Продолжим обе биссектрисы до пересечения с описанной окружностью — точкой пересечения будет середина M дуги BC (равные вписанные углы BAM и MAC опираются на равные дуги BM и MC). A_1M — диаметр окружности, поэтому $A_1M > AM$. В то же время $MD > MD_1$, тогда $A_1M - MD_1 > AM - MD$, т.е. $A_1D_1 > AD$.

Итак, наибольшую биссектрису имеет равнобедренный треугольник.

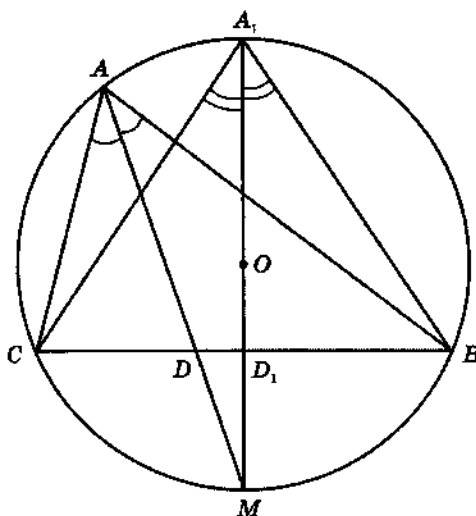


Рис. 9

Степени и корни. Степенные функции

Напомним еще раз, что методическая линия, связанная с изучением функций, в нашем курсе приоритетная. В 8 классе освоение квадратичной функции предшествовало изучению квадратных уравнений. Изучение тригонометрии в 10 классе начиналось с тригонометрических функций, а тригонометрические формулы появились позднее. Ту же линию вы обнаружите и в главе 6: понятие корня n -й степени из числа вводится при помощи графических соображений, а изучению свойств радикалов предшествует изучение функции $y = \sqrt[n]{x}$. Подчеркнем, что определенные преимущества при изучении этой темы будут иметь те, кто учился в 8 классе по нашим учебным пособиям: и структурно, и идейно, и методически, и стилистически материал, изложенный в первых четырех параграфах главы (речь идет о § 33—36), коррелирует с темой «Квадратные корни». Этот материал достаточно традиционен, отметим лишь несколько обстоятельств.

В учебнике нет понятия арифметического корня, поскольку его использование в общеобразовательной школе по сути дела лишено смысла. В школьном курсе алгебры нет речи об n значениях корня n -й степени из действительного числа; в силу принятых определений эта операция всегда однозначно определена: корень n -й степени из положительного числа есть положительное число, корень из 0 есть 0, корень нечетной степени из отрицательного числа есть отрицательное число. При этих условиях «довесок» в виде прилагательного «арифметический» представляется излишним.

В учебнике между строк сквозит мысль о том, что $\sqrt[4]{5}$ — иррациональное число. Приведем доказательство соответствующего факта.

Ясно, что $\sqrt[4]{5}$ — положительное число, которое больше, чем 1. Предположим, что оно рациональное, т. е. что $\sqrt[4]{5} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая неправильная (это, впрочем, несущественно) дробь. Тогда $5 = \frac{p^4}{q^4}$; $p^4 = 5q^4$. Следовательно, p^4 делится на 5, поэтому и p делится на 5, т. е. число p можно представить в виде $p = 5n$. Тогда $(5n)^4 = 5q^4$, т. е. $q^4 = 125n^4$. Значит, q^4 делится на 125, а поэтому и на 5, следовательно, $q = 5k$. Итак, $p = 5n$, $q = 5k$, а это противоречит тому, что $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Значит, предположение о рациональности числа $\sqrt[4]{5}$ неверно, т. е. это число — иррациональное.

Все свойства радикалов сформулированы и доказаны в учебнике лишь для наиболее важного случая, когда под знаками корней содержатся положительные числа. Упоминание о подкоренных выражениях произвольных знаков сделано в учебнике всего 2 раза: когда отмечается, что все свойства радикалов сохраняются для отрицательных подкоренных выражений при нечетных показателях корней, и когда вводится формула

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|.$$

При желании (и при возможности) вы можете дополнить материал, обсудив со своими учениками вопрос об обобщении свойств радикалов на случай подкоренных выражений произвольных знаков. Приведем вариант такого обсуждения.

Пусть a и b — отрицательные числа, а n — четное число. В этом случае нельзя записать, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, поскольку правая часть такого «равенства» не имеет смысла (тогда как левая его часть определена). Здесь можно рассуждать так: a и b — отрицательные числа, значит, $ab > 0$. Но тогда $ab = |ab| = |a| |b|$, а поэтому

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a| |b|} = \sqrt[n]{|a|} \sqrt[n]{|b|}.$$

Вообще, если a и b — числа одного знака, то справедливы соотношения (свойства 1' и 2'):

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \sqrt[n]{|b|};$$

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{|a|} : \sqrt[n]{|b|}.$$

Любопытно обстоит дело с обобщением свойства 5, касающегося умножения или деления показателей корня и подкоренного выражения на одно и то же натуральное число. Например, нельзя осуществить такое деление в выражении

$$\sqrt[4]{(3 - \pi)^2},$$

если сделать это бездумно, то получится выражение, лишенное смысла:

$$\sqrt{3 - \pi}$$

(под корнем четной степени — отрицательное число). Для проведения правильных рассуждений опять приходится использовать знак модуля:

$$\sqrt[4]{(3 - \pi)^2} = \sqrt[4]{|3 - \pi|^2} = \sqrt{|3 - \pi|} = \sqrt{\pi - 3}.$$

Точно так же нельзя записать, что

$$\sqrt[3]{3 - \pi} = \sqrt[3]{(3 - \pi)^2},$$

поскольку в этом «равенстве» в левой части содержится отрицательное, а в правой — положительное число. Правильные рассуждения выглядят так:

$$\sqrt[3]{3 - \pi} = -\sqrt[3]{\pi - 3} = -\sqrt[3]{(\pi - 3)^2}.$$

В § 37 речь идет о степенях с любыми рациональными показателями. Учащиеся должны понимать, что определения в математике не обсуждаются, не доказываются. Но все-таки в большинстве случаев в основе того или иного определения имеется «земное начало». Вот это «земное начало» и следует, если будет возможность, довести до них. В учебнике даны наброски соответствующего подхода, здесь мы остановимся на этом подробнее.

Известно, что $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n множителей) и что $a^1 = a$. Но такое содержательное истолкование степени не переносится ни на случай степени с нулевым или отрицательным целым показателем, ни на случай дробного показателя. В самом деле, ведь нельзя же повторить число a множителем -5 раз, или 0 раз, или $\frac{3}{5}$ раза. Поэтому для каждого случая приходится придумывать свое определение. Но при этом есть «земное начало»: нужно придумать такое определение, чтобы на него распространялись известные и привычные свойства натуральных степеней (при умножении показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются). Как определить a^0 ? Будем исходить из того, что должно выполняться равенство $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$, т.е. $a^n \cdot a^0 = a^n$; это возможно лишь в случае, когда $a^0 = 1$. Именно такое определение степени с нулевым показателем и ввели для любого основания a , кроме $a = 0$ (символ 0^0 считается в математике лишенным смысла, причем понятно почему: с одной стороны, 0 в любой степени должен давать в итоге 0 , с другой стороны, если сделать акцент на нулевой показатель, в итоге должно получиться число 1 . Двойственности ситуации математики стараются избегать).

Как определить a^{-n} ? Так, чтобы выполнялось равенство $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)}$, т.е. $a^n \cdot a^{-n} = a^0$ или $a^n \cdot a^{-n} = 1$. Последнее равенство возможно лишь в случае, когда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Именно такое определение степени с отрицательным целым показателем и принято в математике для любого основания a , кроме $a = 0$.

Пусть теперь $a > 0$ и надо определить $a^{\frac{p}{q}}$. Хотелось бы, чтобы при этом выполнялось свойство: «при возведении степе-

ни в степень показатели перемножаются», в частности, должно выполняться равенство $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q}$, т. е. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$. Но если $x^q = a^p$, то $x = \sqrt[q]{a^p}$. Следовательно, есть смысл определить $a^{\frac{p}{q}}$ как $\sqrt[q]{a^p}$. Но будет ли такое определение удачным? Да, если окажется, что при нем сохраняются все привычные свойства степеней.

Докажем для примера, что при умножении показатели складываются. Имеем:

$$a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}} \sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}}.$$

Аналогично можно проверить выполнение остальных свойств степени. Значит, предлагаемое определение удачно и его можно принять.

Подчеркнем, что понятие степени с дробным показателем определено в математике только для неотрицательных оснований. В связи с этим особое внимание обратите на замечание, приведенное в § 37 о том, что иногда приходится слышать возражения: неверно, что запись $(-8)^{\frac{1}{3}}$ лишена смысла, ведь можно же вычислить корень 3-й степени из числа -8 ; получится $\sqrt[3]{(-8)} = -2$. Так почему бы не считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$? Если бы математики не запретили себе возводить в дробные степени отрицательные числа, то вот с какими неприятностями пришлось бы столкнуться:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Получилось «равенство» $-2 = 2$. Выбирая определения, математики как раз и заботятся о том, чтобы все было точно и недвусмысленно. Поэтому в определении степени с нулевым показателем a^0 появилось ограничение $a \neq 0$, а в определении степени с положительным дробным показателем $a^{\frac{p}{q}}$ появилось ограничение $a \geq 0$.

В связи с этим обратимся к примеру 4 из того же параграфа: решить уравнение $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 8 = 0$.

Введя новую переменную $y = x^{-\frac{1}{3}}$, получили квадратное уравнение $y^2 - 2y - 8 = 0$ с корнями $y_1 = -2$, $y_2 = 4$. Теперь задача

сводится к решению двух уравнений: $x^{-\frac{1}{3}} = -2$, $x^{-\frac{1}{3}} = 4$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим $x = \frac{1}{64}$.

Если бы уравнение было дано в виде

$$\sqrt[3]{x^{-2}} - 2\sqrt[3]{x^{-1}} - 8 = 0,$$

то после введения новой переменной получили бы то же квадратное уравнение и аналогичную совокупность уравнений

$$\sqrt[3]{x^{-1}} = -2; \quad \sqrt[3]{x^{-1}} = 4.$$

В этом случае из первого уравнения нашли бы, что $x = -\frac{1}{8}$, а из второго, что $x = \frac{1}{64}$.

После того как введено понятие степени с любым рациональным показателем, естественно сделать следующий шаг — изучить степенные функции; этому посвящен § 38, завершающий главу 6. Правда, обычно степенными функциями называют функции вида $y = x^r$, где r — любое действительное число, как рациональное, так и иррациональное. Но поскольку понятие степени с иррациональным показателем учащимся пока не известно (это будет сделано в главе 7), приходится ограничиваться степенными функциями только с рациональными показателями. Основная цель этого параграфа — добиться того, чтобы учащиеся четко представляли себе эскиз графика степенной функции $y = x^r$ для любого рационального показателя r и знали, что:

1) при четном натуральном значении r график похож на параболу, а при нечетном, большем, чем 1, — на кубическую параболу;

2) при нечетном отрицательном целом значении r график похож на гиперболу, а при четном состоит как бы из двух ветвей гиперболы, симметричных относительно оси y ;

3) при положительном дробном значении r график похож на одну ветвь параболы, которая ориентирована вверх при $r > 1$ и вправо — при $0 < r < 1$;

4) при отрицательном дробном значении r график похож на одну ветвь гиперболы;

5) график любой степенной функции проходит через точку $(1; 1)$.

При изучении степенных функций мы естественно не отказываемся от заявленного выше инвариантного ядра (подробно речь о нем шла в теме 1): в примерах, приведенных в учебнике, и в упражнениях, имеющих в задатнике, реализованы все шесть стандартных сюжетов, составляющих указанное ядро.

В этом же параграфе идет речь о дифференцировании и интегрировании степенной функции. Обратите внимание на то, что в задачниках в соответствующем наборе упражнений (и до черты, и после черты) повторяется структура § 28, в котором изучались формулы и правила дифференцирования: сначала идет блок упражнений на отыскание производной в общем виде, затем блок — на отыскание значения производной в конкретной точке, на нахождение углового коэффициента касательной, на нахождение скорости изменения функции, на отыскание угла между касательной к графику функции в заданной точке и осью абсцисс. А далее практически реализуются все основные сюжеты, которые в 10 классе рассматривались в § 29—32: составление уравнения касательной, исследование функций на монотонность и экстремумы, построение графиков функций, отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке с помощью производной. Тем самым осуществляется повторение практически всех основных компонентов того раздела школьного курса алгебры, который называют началами математического анализа.

ТЕМА 7

Показательная и логарифмическая функции

В § 39 сначала рассматривается функция $y = 2^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Отмечается, что это — возрастающая функция, неограниченная сверху и ограниченная снизу, не имеющая ни наименьшего, ни наибольшего значений. Как правило, учащихся смущает некоторая, на их взгляд, искусственность ситуации: они привыкли рассматривать функции, заданные на сплошных промежутках, а им предлагают рассмотреть функцию, заданную на «дырявом» множестве рациональных чисел. Несколько комфортнее будут чувствовать себя здесь те учителя и учащиеся, которые исповедуют нашу концепцию с 7 класса. Дело в том, что в наших учебниках отдается приоритет функциям с заданной областью определения (такowymi являются, например, кусочные функции), и ученики постепенно привыкают к любому виду области определения. Если, в частности, область определения функции — множество натуральных чисел, то получается числовая последовательность. Именно так мы действовали в курсе алгебры 9 класса, при первом знакомстве с числовыми последовательностями, именно так мы действовали и в § 24.

Учащиеся должны понять, что показательные функции встречаются в реальной действительности, и осознать, с какой трудностью им придется столкнуться при изучении показательных функций. Дело в том, что для всех ранее изученных функций вычисле-

ние конкретных значений функций не представляло особого труда. Если, например, была дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, то можно вычислить значение функции при любом значении аргумента x , как рациональном, так и иррациональном. Например, $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = 1$, $f(\sqrt{3}) = 6 - 5(\sqrt{3}) + 3 = 9 - 5(\sqrt{3})$ и т. д. Если $y = f(x)$ — тригонометрическая функция, то мы вообще отдавали предпочтение иррациональным значениям аргумента $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{13\pi}{4} \text{ и т. д.}\right)$. С показательной функцией дело обстоит сложнее, поскольку об иррациональных показателях степени нигде в курсе речь не шла.

Понятие степени с иррациональным показателем — достаточно тонкое и сложное. Если основание степени a — положительное число, отличное от 1, а показатель степени t — положительное иррациональное число, то сначала строят последовательность десятичных приближений числа t по недостатку: $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$, — а затем последовательность рациональных степеней числа a : $a_1^r, a_2^r, a_3^r, \dots, a_n^r, \dots$. Эта последовательность монотонна и ограничена и поэтому сходится (по теореме Вейерштрасса). Предел последовательности и принимается за a^t . Это — типичная для классического анализа «теорема существования»: искомое значение существует, а что оно собой представляет конкретно — никого не волнует; главное, что оно есть и однозначно определено (в силу теоремы о единственности предела). Но так же обстояло дело и раньше: мы знаем, например, что $\operatorname{arctg} 0,8$ — конкретное и вполне определенное число, которое можно использовать при записи выражений, не думая о том, что это за число.

Если вы использовали в 9 классе наш учебник алгебры, то напомним учащимся, что с терминами «показательная функция» и «экспонента» они уже встречались. Приведем здесь (с небольшими изменениями) фрагмент из упомянутого учебника (из параграфа о геометрической прогрессии).

«Перепишем формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$ в виде

$$b_n = \frac{b_1}{q} q^n$$

и введем обозначения: $b_n = y$, $\frac{b_1}{q} = m$. Получим $y = m q^n$ или, подробнее,

$y = m q^x$, $x \in N$. Аргумент x содержится в показателе степени, поэтому такую функцию называют показательной. Значит, геометрическую прогрессию можно рассматривать как показательную функцию, заданную

на множестве N натуральных чисел. График функции состоит из изолированных точек (с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, и т. д.), лежащих на некоторой кривой, которую называют экспонентой».

Завершая разговор о материале первого параграфа главы 7, подчеркнем, что это — непосредственное продолжение главы 6, где учащиеся познакомились с обобщением понятия о показателе степени (удалось довести дело до степени с любым рациональным показателем). То, что соответствующие параграфы расположены в учебнике практически рядом, — несомненный плюс.

Обращаем внимание читателя на четыре теоремы, на которых в следующих двух параграфах базируется теория решения показательных уравнений и неравенств.

Теорема 1. Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$; неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.

Теорема 3. Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 4. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$; неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.

Материал § 40 достаточно традиционен и не нуждается в особых комментариях: речь идет о показательных уравнениях и неравенствах.

Понятие логарифма в § 41 вводится при помощи графических соображений (как и понятие корня n -й степени), а изучению логарифмов предшествует изучение функции $y = \log_a x$. Обратите внимание, что порядок ходов в § 42—44 (понятие логарифма, логарифмическая функция, свойства логарифмов) традиционен для нашей концепции; такой порядок ходов был и в главе 6 при изучении радикалов.

Существует несколько методических подходов к решению логарифмических уравнений, о которых идет речь в § 44. Особенно популярным в последнее время стал такой подход: сначала надо найти ОДЗ (область допустимых значений переменной) уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, для чего следует решить систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Затем решают уравнение $f(x) = g(x)$ и делают проверку найденных корней по ОДЗ уравнения.

Второй подход заключается в следующем: не находят ОДЗ, а сразу решают уравнение $f(x) = g(x)$. Затем все найденные корни проверяют непосредственной их подстановкой в исходное уравнение.

Чем плох первый подход? Тем, что иногда решение системы неравенств, определяющей ОДЗ уравнения, бывает весьма затруднительным, отвлекающим учащихся от основной работы — от решения уравнения. При этом часто бывает так, что уравнение $f(x) = g(x)$ вообще не имеет корней, так что вся работа по опережающему отысканию ОДЗ оказывается пустой тратой времени. Бывает и так, что указанное уравнение имеет настолько простые корни, что их проверка подстановкой в исходное уравнение осуществляется легко и быстро. В таких случаях предпочтительнее второй подход. А чем плох второй подход? Тем, что мы рискуем «нарваться» на проверку подстановкой «плохих» корней. В этом случае предпочтительнее первый подход.

Второй подход предпочтительнее и по идейным соображениям. В принципе сначала нужно решить уравнение, затем сделать проверку. А при первом подходе, еще ничего не сделав для собственно решения уравнения, мы начинаем «подстилать соломку», находить ОДЗ, думая о возможном появлении посторонних корней и о необходимости их отсева. В то же время при решении логарифмических неравенств (§ 45), где в принципе невозможна проверка, у нас нет иного выбора, кроме как использовать первый подход.

Мы в учебнике при решении логарифмических уравнений отдаем предпочтение третьему подходу, который, на наш взгляд, нивелирует недостатки как первого, так и второго подходов. Наш план решения уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ заключается в следующем: решаем уравнение $f(x) = g(x)$; если уравнение имеет корни, то делаем проверку. Для этого составляем систему неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

но не решаем ее, а проверяем найденные корни уравнения подстановкой в неравенства системы (что значительно проще).

Но, вообще говоря, тактика решения логарифмического уравнения может быть достаточно гибкой: если ОДЗ можно найти без труда, выбирайте первый подход; если с ОДЗ много возни, то выбирайте третий подход (или второй — в случае очень простых корней). Самый общий взгляд на вопросы равносильности уравнений, который позднее обсудим в главе 10, заключается в следующем.

Решение уравнения, как правило, осуществляют в три этапа.

Первый этап — технический. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow \dots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — анализ решения. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — проверка. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

При решении логарифмического уравнения, как правило, происходит расширение ОДЗ, а это — неравносильное преобразование уравнения; поэтому проверка — неотъемлемая часть решения уравнения (а не приложение к решению).

В § 44 и 40 выделяются три основных метода решения логарифмических (соответственно показательных) уравнений. В объединенном виде это выглядит так:

1) *функционально-графический метод.* Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций;

2) *метод уравнивания показателей* (для показательных уравнений) и *метод потенцирования* (для логарифмических уравнений);

3) *метод введения новой переменной.*

Здесь представлены три общих метода решения любых уравнений, о чем подробнее пойдет речь в главе 10, причем второй из указанных выше методов — это (в классификации, которая используется в главе 10) метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.

В § 46 речь идет о переходе к новому основанию логарифма. Следует обратить внимание читателя на две методические особенности в изложении этого материала.

Первая особенность заключается в функционально-графическом осмыслении формулы перехода к новому основанию логарифма, на что в других учебниках не обращается внимание. В нашем учебнике, где функционально-графическая линия — приоритетная, мы, естественно, не могли пройти мимо красивой графической идеи, которая заключается в следующем.

Логарифмических функций бесконечно много: $y = \log_2 x$; $y = \log_3 x$; $y = \log_{0,3} x$; $y = \lg x$; $y = \log_a x$ и т.д. Рассматривая

их графики для случая, когда основания логарифмов больше 1, например $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, можно высказать предположе-

ние, что график первой функции получается из графика второй функции растяжением от оси x с некоторым коэффициентом $k > 1$, т. е. что

$$\log_2 x = k \log_3 x.$$

Выведа формулу перехода к новому основанию логарифма, убеждаемся в справедливости высказанного предположения:

$$\log_2 x = \log_2 3 \cdot \log_3 x$$

($k = \log_2 3$); подтвердилась и наша догадка о том, что в данном случае $k > 1$, поскольку $\log_2 3 > 1$.

Вторая особенность заключается в том, что мы придаем большое значение частному случаю формулы перехода, который зафиксирован в учебнике в следствии 2: если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство

$$\log_a b = \log_a b^r.$$

Например,

$$\log_2 3 = \log_2 3^2 = \log_2 3^{-1} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} \text{ и т. д.}$$

Сама формула перехода к новому основанию доказана с помощью метода введения новых переменных, как и все свойства логарифмов в § 43, как и все свойства корней n -й степени в § 35 (заметим, что тот же прием мы использовали и в курсе алгебры 8 класса при выводе свойств квадратных корней).

Принципиальное значение имеет § 47, в котором ученики знакомятся с числом e и натуральными логарифмами, с функциями $y = e^x$ и $y = \ln x$, с соответствующими формулами дифференцирования. В курсе математического анализа, напомним, число e вводится как значение предела: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (второй замечательный предел).

Идти этим путем в общеобразовательной школе мы сочли неразумным. Конечно, второй замечательный предел очень важен в математике, но школьники в этом не смогут убедиться, так что указанный формальный путь окажется для них чистой схоластикой. Мы выбрали известный методический прием, опирающийся на интуицию и правдоподобные рассуждения: рассматриваем графики показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, для различных оснований a и касательные к этим графикам в точке $(0; 1)$. Замечаем, что для функции $y = 2^x$ касательная образует с осью x угол 35° , для функции $y = 3^x$ — угол 48° , для функции $y = 10^x$ — угол $66,5^\circ$ (разумеется, все значения углов даны приближенно). Здравый смысл подсказывает, что, наверное,

есть такое основание (его обозначают буквой e), для которого соответствующий угол равен 45° . Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35° , что меньше, чем 45° , а для функции $y = 3^x$ он равен 48° , что больше, чем 45° . В курсе математического анализа доказано, что e — иррациональное число, т.е. представляющей собой бесконечную десятичную непериодическую дробь: $e = 2,7182818284590\dots$

Геометрический подход мы используем и для вывода формул дифференцирования функций $y = e^x$ и $y = \ln x$.

Чтобы учащиеся овладели этими новыми математическими моделями, мы, придерживаясь привычной концепции, и в примерах, приведенных в учебнике, и в упражнениях, имеющих в задатнике, реализуем все шесть стандартных сюжетов, составляющих многократно упоминавшееся выше инвариантное ядро. Обратите также внимание на то, что в задатнике в соответствующем наборе упражнений повторяется структура § 28, в котором изучались формулы и правила дифференцирования: сначала идет блок упражнений на отыскание производной в общем виде, затем блок на отыскание значения производной в конкретной точке, нахождение углового коэффициента касательной, нахождение скорости изменения функции, отыскание угла между касательной к графику функции в заданной точке и осью абсцисс. А далее практически реализуются все основные сюжеты, которые в 10 классе рассматривались в § 29—32: составление уравнения касательной, исследование функций на монотонность и экстремумы, построение графиков функций, отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке с помощью производной. Эта система в задатнике сначала осуществляется для функции $y = e^x$, а затем для функции $y = \ln x$. Тем самым осуществляется непринудительное повторение существенной части материала, изученного ранее, в курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса (то же самое было при изучении темы 6).

ТЕМА 8

Первообразная и интеграл

В § 49 речь идет об определенном интеграле. Он начинается с трех задач — о вычислении площади криволинейной трапеции, о вычислении массы стержня и о перемещении точки, решение которых приводит к одной и той же математической модели. И снова, как при введении понятия производной, важное методологическое значение имеет вывод, который делает учитель на основании рассмотрения конкретных задач. Различные задачи

из разных областей знания приводят к одной и той же математической модели вида $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Значит, следует специально заняться изучением этой новой модели, т. е. присвоить ей новый термин (определенный интеграл), придумать для нее новое обозначение $\left(\int_a^b f(x)dx\right)$ и изучить правила оперирования с новой моделью.

Математическое описание той модели, которая была построена в трех указанных выше задачах, выглядит следующим образом. Для функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$:

- 1) разбивают отрезок $[a; b]$ на n равных частей;
- 2) составляют сумму

$$S_n = f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_k) \Delta x_k + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1};$$

- 3) вычисляют $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Этот предел и есть $\int_a^b f(x)dx$.

Напомним, что в курсе математического анализа дается более широкое истолкование модели: отрезок не обязательно делят на равные части и в каждом из участков разбиения берут значение функции в произвольной точке (а не в концевой, как в школьном упрощенном варианте).

При обосновании формулы Ньютона — Лейбница можно ограничиться ее физическим истолкованием, приведенным в учебнике.

Центральное место во всем разделе, связанном с изучением элементов интегрального исчисления, занимает вычисление площадей плоских фигур. Основной фигурой считается криволинейная трапеция, т. е. фигура, ограниченная в координатной плоскости двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Советуем вам при изучении этого материала правильно расставлять акценты: главное здесь — построение геометрических моделей и снятие соответствующей информации с чертежа, а не вычисление интегралов. Не ради изучения интеграла вычисляются площади, наоборот, интеграл изучается ради нахождения площадей. В связи с этим обратите особое внимание на упражнения в задачнике, где предлагается вычислить интеграл, опираясь на геометрические соображения.

$$49.29. \text{ а) } \int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx; \text{ б) } \int_{-1}^0 \sqrt{-x^2 - 2x} dx.$$

$$49.30. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2} dx; \text{ б) } \int_{-4}^4 \sqrt{64 - x^2} dx.$$

Решения приведены ниже, во второй части книги.

Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

Тематически содержание § 50 весьма сильно пересекается с содержанием соответствующего «статистического» § 19 из нашего учебника «Алгебра—9». На 12 страницах из 16 рассказано об основных шагах первичной статистической обработки информации: упорядочении и группировке данных, составлении таблиц, построении графиков, нахождении среднего значения. В соответствующем параграфе задачника примерно такое же соотношение уже известного из основной школы материала и новых сведений.

Для учеников 10—11 классов, которые обучались по нашему учебнику «Алгебра—9», это дает возможность в спокойном режиме повторить достаточно новый для отечественной школы учебный материал и просто вспомнить соответствующую статистическую терминологию. Впрочем, ученик, впервые начавший изучать эту тему, не встретит серьезных трудностей: текст учебника и задачника организован и с расчетом на тех учащихся, которые ранее не встречались с подобного рода учебным материалом. На наш взгляд, в ближайшие годы число таких учеников будет весьма заметным.

В целом же, по сравнению с 9 классом, изложение более лаконично. В § 19 учебника «Алгебра—9» каждому шагу обработки информации поочередно уделен отдельный пункт с разбором различных примеров. В учебнике для 10—11 классов сразу все шаги объяснены на примере одного измерения (проведение лотереи), а затем в каждом из следующих шести примеров одновременно «работают» и группировки, и таблицы, и графики. В примере 7 подсчитывается среднее значение данных, полученных в примерах 1—6.

В данном УМК привычный для классической статистики термин «абсолютная частота» варианты измерения мы заменяем на термин «кратность» варианты. Дело в том, что термин частота, на наш взгляд, излишне часто и разнообразно используется в стохастике: тут и эмпирическая частота, и абсолютная, и относительная, и статистическая, и процентная и т. д., кроме этого, еще и частота варианты, и частота наступления события. При этом абсолютная частота — это натуральное число, а все остальные частоты — числа из отрезка $[0; 1]$. На первых порах такое многообразие, скорее всего, является перебором. Таким образом, «кратность» результата измерения означает, сколько раз встретился данный результат среди всех результатов измерения, а

«частота» — какую часть (долю) занимает данный результат среди всех результатов.

Действительно новым материалом являются сведения о «дисперсии» и «среднем квадратическом отклонении» результатов измерения, собранные в конце параграфа. Вообще говоря, тут весьма легко можно перейти к стилю, так или иначе близкому к стилю учебников высшей школы, с различными теоремами, следствиями, свойствами и т. п. По нашему мнению, это совершенно недопустимо в общеобразовательной (не профильной) школе. С одной стороны, по-настоящему глубоко и серьезно изучить подобного рода материал у учеников нет ни времени, ни возможности. С другой стороны, в реальной практике статистической обработки данных дисперсию и квадратичное отклонение результатов измерений «вручную» давно уже никто не считает. Для этого используют компьютерные программы обработки данных, которые есть практически в любой достаточно полной операционной системе. На наш взгляд, правильнее было бы познакомить учащихся с методами обработки данных на уроках информатики при изучении Microsoft Excel или других подобных программ.

По этой причине в конце § 50 мы ограничиваемся примером 8 сравнения точности и надежности трех различных ружей, даем описательное определение того, за что, собственно, отвечает дисперсия, приводим алгоритм ее вычисления и иллюстрируем этот алгоритм разбором ситуации, описанной в этом примере. По нашему мнению, это тот минимум, который нельзя пропустить при любом способе знакомства с такой важной числовой характеристикой, как дисперсия; стремление же к максимуму может привести к излишне кардинальному изменению существующего курса «Алгебра и начала математического анализа» с совершенно излишним статистическим уклоном.

На описательном уровне: если x_1, x_2, \dots, x_n — результаты измерения и M — их среднее значение, то *дисперсия* D вычисляется так:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2}{n}.$$

Итак, дисперсия D результатов измерения равна среднему арифметическому квадратов отклонений этих результатов от их среднего значения. Если дисперсия D достаточно мала, то большинство из ошибок измерения $x_i - M$ невелики по модулю. Это значит, что числа x_1, x_2, \dots, x_n в основном довольно тесно группируются вокруг своего среднего значения M . В таком случае результаты, заметно отличающиеся от M , скорее всего следует отнести к ошибкам измерения. Другими словами, если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = \dots = x_n = M$ и, грубо говоря, если $D \approx 0$, то $x_i \approx M$.

Название § 51 «Простейшие вероятностные задачи» в учебнике для 10—11 классов совпадает с названием § 20 в нашем учебнике для 9 класса. Эти параграфы совпадают между собой и по содержанию: вероятность как модель реальных случайных событий, классическое определение вероятности, алгоритм вычисления вероятности по этому определению, связь между вероятностью события и противоположного ему события — вот основные акценты в § 51. В то же время прямых цитирований из учебника для 9 класса нет. Тем самым уже известный из основной школы учебный материал повторяется и закрепляется на новом массиве примеров и задач.

Термин «простейшие» в применении к вероятностным задачам означает отсутствие формульной комбинаторики (числа размещений и сочетаний). Во всех примерах и задачах этого параграфа вполне хватает правила умножения, формулировку которого мы, разумеется, повторяем и в данном учебнике для старшей школы. Поэтому, несмотря на присутствие термина «вероятностные» в названии параграфа, с учебной точки зрения в § 51 закрепляется умение работать с простейшими комбинаторными ситуациями: проводить непосредственный перебор всех случаев, разумно организовывать перебор и использовать правило умножения. Пожалуй, единственным отличием является отсутствие дерева всевозможных вариантов. Этот материал остается в основной школе.

Рассмотрение цепочки последовательно усложняющихся комбинаторных примеров подводит к необходимости расширить имеющийся технический аппарат комбинаторики. Грубо говоря, становится уже тесновато действовать в рамках лишь перебора и правила умножения. Тем самым структурно § 51 образует мостик между материалом в той или иной мере известным из курса основной школы и новыми для учеников понятиями размещения и сочетания.

Хотелось бы обратить специальное внимание на пример 5: «Игральную кость бросают четыре раза. Что более вероятно: то, что шестерка появится хотя бы один раз, или же, что шестерка не появится ни разу?» Он интересен с исторической точки зрения, так как послужил одной из отправных точек к созданию в XVII веке теории вероятностей. Важен он и содержательно, так как по существу является одной из простейших схем Бернулли независимого повторения испытания с двумя исходами, т. е. является своего рода пропедевтикой материала § 54, заключительного в этой главе. Кроме того, в анализе этого примера ясно указано, что основой решения является (в очередной раз!) правило умножения. Если действовать предполагая, что теорема Бернулли заранее известна, то ответ для вероятности того,

что шестерка не появится ни разу, следовало бы получить как $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Мы получаем тот же ответ, но как $P(A) = \frac{5^4}{6^4}$, где для вычисления и числителя, и знаменателя применяется уже хорошо известное правило умножения.

В § 52, формально, приведены сведения об использовании двух, пожалуй наиболее знакомых большинству учителей, комбинаторных формул:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ и } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Во многих УМК для школы при изложении этого учебного материала авторы выбирают стиль, близкий к справочной литературе. А именно, кратко формулируют определения того, что именно обозначается символами C_n^k и A_n^k , сообщают две приведенные выше формулы и дают несколько примеров их использования. Нет сомнений, что это самый короткий путь к использованию указанных формул при решении задач. Зачастую такой комбинаторный «ликбез» проводится и в 9 классе, а в некоторых УМК даже и в 7 классе.

На наш взгляд, использование формульной комбинаторики в основной школе по меньшей мере неразумно: у учеников просто нет привычки рассуждать в комбинаторном стиле и использовать «буквы с двумя индексами». В учебнике «Алгебра—9» приведена только формула $P_n = n!$ для числа перестановок. При этом она сообщена не в виде аксиомы с последующими примерами ее использования. Наоборот, мы движемся от частного к общему. И само понятие факториала, и формулу $P_n = n!$ мы приводим только после решения нескольких разных по виду задач, которые оказываются родственными по способу их решения. В учебнике для 10—11 классов мы, во-первых, повторяем примеры, иллюстрирующие появление формулы $P_n = n!$ в качестве еще одного применения правила умножения. Затем, тоже начиная с конкретных примеров, мы приходим к формулам о выборе *двух* элементов из n данных:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ и } A_n^2 = n(n-1).$$

При этом мы сначала получаем правые части этих равенств, а левые *по определению* есть просто сокращения излишне длинных словесных оборотов «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» и «число всех выборов двух элементов с учетом их порядка из n данных». После этого по аналогии вводятся символы C_n^k и A_n^k и доказывается теорема о том,

что $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ и $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Доказательство основано

(опять!) на правиле умножения. По нему сразу получается, что $A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$,

а тот факт, что правая часть этого равенства совпадает с $\frac{n!}{(n-k)!}$,

проверяется отдельно. Формулы $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$ или $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ так-

же выводим из правила умножения: сначала k элементов из n данных выбираются «кучей» (получается C_n^k способов), а потом выбранные k элементов произвольно упорядочиваются (получается P_k способов).

Тем самым в § 52 мы постепенно переходим от знакомого материала (факториалы и перестановки) к новому (сочетания и размещения), постоянно опираясь на базовое для элементарной комбинаторики правило умножения. Треугольник Паскаля появляется в самом конце § 52. Никаких серьезных теоретических сведений о треугольнике Паскаля мы не сообщаем: для данного УМК хватает того, что это очень красивая и удобная в использовании таблица для хранения чисел C_n^k .

Весьма краткий § 53 практически является продолжением § 52, и в первоначальном варианте учебника таковым и был, т. е. стоял в конце § 52. Все же мы решили выделить бином Ньютона в отдельный параграф. Во-первых, иначе § 52 оказался бы излишне объемным и перегруженным техническими деталями, а, во-вторых, бином Ньютона и исторически, и с учебной точки зрения — это материал, требующий для освоения специального внимания, отдельного от знакомства с сочетаниями и размещениями.

Сначала в § 53 выписаны формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^1 = a+b = 1 \cdot a + 1 \cdot b;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3;$$

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4.$$

С их помощью обнаруживается связь с только что изученным треугольником Паскаля. Затем приведена собственно формула биннома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \\ + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

и кратко приведено ее обоснование, основанное именно на комбинаторном определении чисел C_n^k . По существу, в этом параграфе мы лишь знакомимся с формулой бинома Ньютона.

Заключительный в этой главе § 54 «Случайные события и их вероятности» наиболее объемён и не столь однороден по содержанию, как другие параграфы. Он состоит из четырех пунктов.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей.
2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий.
3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость.
4. Геометрическая вероятность.

В п. 1 продолжается начавшийся в § 51 подсчет вероятностей различных событий, но уже с использованием такого мощного комбинаторного аппарата, как формулы для числа сочетаний. Подчеркнем, что и в учебнике, и в задачнике мы уделяем довольно мало внимания формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ для числа размещений по сравнению с формулой для числа сочетаний. Дело в том, что, по нашему мнению, в большинстве элементарных комбинаторных задач найти число размещений всегда можно по правилу умножения, и запоминание формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ не так уж и необходимо. В то же время значимость и «используемость» формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ существенно выше: и при решении задач отдельно вывести ее затруднительно, и во многих вопросах теории тяжело обойтись без надежного знания этой формулы.

В п. 1 подробно рассматривается решение двух примеров. В первом из них отрабатывается умение применять формулу $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, во втором — формулы $P(A + B) = P(A) + P(B)$ и $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$ для попарно несовместных событий.

В п. 2 сначала обосновывается формула $P(A + B) + P(AB) = P(A) + P(B)$ вероятности суммы двух произвольных событий. В частном случае, когда события A и B несовместны, получается, что их произведение AB есть событие невозможное, вероятность $P(AB)$ равна нулю и поэтому для таких событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$, что уже объяснялось и в 9 классе и повторялось в п. 1.

В общей ситуации неясно, что проще вычислить: $P(A + B)$ или $P(AB)$. Однако есть крайне важный для всей теории вероятностей случай, когда этот вопрос ясен полностью. Речь идет о

независимых событиях A и B , что по определению означает справедливость равенства $P(AB) = P(A)P(B)$. В таком случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Понятие независимости двух событий является, пожалуй, одним из наиболее деликатных в теории вероятностей. Мы ограничимся лишь следующей констатацией. При решении практических задач в подавляющем большинстве случаев независимость событий предполагается априорно известной. Другими словами, если строго следовать определению, то при решении задач сначала надо было бы проверить равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ и на его основании сделать вывод о том, что события A и B независимы. На практике все наоборот. Сначала по условию задачи делается предположение о независимости A и B , из этого делается вывод о справедливости равенства $P(AB) = P(A)P(B)$ и затем это равенство применяется в вычислениях. Четыре пункта примера 4 детально демонстрируют технику такого применения.

Пункт 4 § 54 о статистической устойчивости, несомненно, является центральным в основах современной теории вероятностей. Однако сделать его столь же центральным в школьном курсе «Алгебра и начала математического анализа» и доказательно изложенным в непрофильной старшей школе, на наш взгляд, не представляется возможным. Для детальной проработки этой темы следовало бы ввести отдельный учебный предмет. Мы ограничиваемся схематичной прорисовкой основных моментов. Сначала (пример 5) мы продолжаем пример 4 из предыдущего пункта, заменив двух стрелков на одного, делающего три выстрела. Затем формулируем теорему Бернулли о вычислении вероятности наступления k успехов при n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами. В примере 6 демонстрируем, как теорема Бернулли «работает» в конкретных ситуациях. Наконец, сообщаем простейшую форму закона больших чисел (теорема 4): при большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события A со все большей точностью приближенно равна вероятности

события A : $\frac{k}{n} \approx P(A)$. Этот факт устанавливает связь между статистическим подходом к определению вероятности как частоте появления события в серии независимых повторений одного и того же испытания и классическим определением вероятности случайного события. Подчеркнем, что статистический подход связан с проведением и повторением испытания в реальности, а классическое определение относится к модели этой реальности. Грубо говоря, явление статистической устойчивости показывает, что модель эта является «правильной», т. е. со все большей точностью соответствующей реальным явлениям и событиям.

Пункт 4 § 54 относится к вероятностным моделям с бесконечным числом исходов, для которых классическое определение вероятности принципиально не применимо. Речь идет о вычислении вероятности события, состоящего в том, что точка, случайно выбранная из какой-то фигуры X , окажется принадлежащей какой-то фиксированной части A этой фигуры. Вычисление состоит в нахождении частного $\frac{\text{площадь}(A)}{\text{площадь}(X)}$. Если речь идет о подмно-

жествах числовой прямой, то площади надо заменить длинами. Разобраны два простых примера, которые, по существу, напоминают примеры, рассмотренные в конце параграфа «Простейшие вероятностные задачи» в учебнике «Алгебра—9».

В заключение отметим три понятия, которые традиционно входят во все вузовские курсы основ теории вероятностей, но которые мы считаем недопустимыми для изучения в общеобразовательной школе и не включаем их в УМК не только на базовом, но и на профильном уровне.

Во-первых, это относится к понятию условной вероятности и, соответственно, к формуле полной вероятности, формуле Байеса и формуле вероятности произведения нескольких событий. Споры нет, эти вещи хороши при систематическом и отдельном изучении специального учебного предмета, с их помощью можно решать все более и более изысканные задачи по теории вероятностей. Однако в рамках уже сложившегося курса «Алгебра и начала математического анализа» при общем знакомстве со стохастикой как учебным предметом, на наш взгляд, и без этого вполне хватает интересных и важных задач, правильно формирующих первые вероятностные представления об окружающей действительности.

Во-вторых, мы нигде не говорим об алгебре событий и не рассматриваем многочисленные манипуляции с событиями в этой необычной алгебре: проблем в школе хватает и с обычной алгеброй. К тому же уверенное жонглирование формулами типа

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D} = A + B + C + D$$

мало что по существу добавляет к базовым представлениям о вероятностях случайных событий. Более того, даже о столь фундаментальном для любой вузовской программы понятии как пространство элементарных событий мы упоминаем очень неявно, только когда пишем о соответствии между некоторыми понятиями теории множеств и понятиями теории вероятностей. Как только начинаешь говорить про пространство элементарных событий и аксиоматику А. Н. Колмогорова, тут же попадаешь в алгебру событий, многочисленные формулы, их следствия, применения и т. п.

Все это невозможно достойным образом реализовать в общеобразовательной школе.

Наконец, мы совершенно сознательно нигде не используем термин «случайная величина». Вкратце, случайная величина есть числовая функция (вообще говоря, не любая!) на пространстве элементарных событий, т. е. аргументами этой функции являются не числа, не пары чисел или что-то подобное, а являются такие абстрактные вещи, как элементарные события. Но раз мы решили ничего не говорить про алгебру событий или про пространство элементарных событий, то нет никакого смысла говорить про функции, определенные на пространстве элементарных событий. Магические заклинания вроде «случайная величина есть числовая переменная величина, принимающая свои значения с различными вероятностями» ничего по существу не проясняют и, более того, еще сильнее запутывают положение дел. Кроме того, до содержательных задач о случайных величинах, как правило, не успевают дойти и во многих вузах. А тривиальные задачи про случайные величины практически всегда можно переформулировать и без случайных величин. Например, вместо «Найдите закон распределения случайной величины, равной сумме очков, выпавших при двукратном бросании игрального кубика» можно спросить чуть длиннее, но без случайных величин: «Какова вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма выпавших очков равна 3? равна 11? Составьте таблицу распределения вероятностей для всех возможных значений такой суммы».

ТЕМА 10

Уравнения и неравенства.

Системы уравнений и неравенств

Завершая изучение курса алгебры в школе, очень полезно посмотреть на него с самых общих позиций. Глава 10 как раз на это и нацелена. Она дает возможность повторить и переосмыслить основные идеи и методы, которые применялись на протяжении пяти лет изучения курса. Это очень важно, поскольку за обилием мелких приемов школьники рискуют не увидеть главного.

В §55 речь идет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда надо делать проверку найденных корней и как ее делать. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры, начиная с 8 класса, так что определенный опыт учащимися накоплен. Для разъяснения им идеологической сущ-

ности понятия равносильности уравнений можно использовать следующий нехитрый методический прием. Представим себе, что нужно измерить расстояние между пунктами *A* и *B*. По каким-то причинам нам удобнее измерить расстояние между пунктами *C* и *D*. Имеем ли мы право заменить первую задачу второй? Да, если точно известно, что эти задачи имеют одинаковые решения, т.е. если доподлинно известно, что расстояние между *A* и *B* равно расстоянию между *C* и *D*.

А теперь посмотрим, как мы рассуждаем при решении уравнений. Пусть требуется решить уравнение $5x - 4 = 2x + 8$, т.е. перед нами поставлен конкретный вопрос: при каких значениях x выражения $5x - 4$ и $2x + 8$ принимают одинаковые значения. Что мы делаем? Мы уходим от ответа на этот вопрос и заменяем данное уравнение другим — уравнением $5x - 2x = 8 + 4$, т.е. $3x = 12$, откуда получаем, что $x = 4$. Таким образом, решаем иную задачу, отвечаем на другой вопрос: при каких значениях x выражения $3x$ и 12 принимают одинаковые значения. Имеем ли мы право на подобную подмену? Да, если точно известно, что эти задачи имеют одинаковые решения, если доподлинно известно, что уравнения имеют одинаковые корни, т.е. что они равносильны. Потому-то стратегическая линия решения уравнения состоит в следующем: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем (1), но равносильное ему; уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), но равносильное ему и т.д. В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни, объявляя их одновременно корнями заданного уравнения.

Но, к сожалению, указанная стратегическая линия далеко не всегда реализуема, часто мы вынуждены осуществлять такие преобразования уравнения, которые приводят к уравнению-следствию (т.е. все искомые корни сохранились, но могли добавиться новые — посторонние). Тогда приходится все найденные корни последнего уравнения цепочки проверять подстановкой в исходное уравнение, отсеивая посторонние корни.

Советуем вам на первых порах, пока речь идет об осмыслении принципиальных вопросов, оформлять решение уравнений по схеме из трех этапов, которые указаны в §55 и которые мы уже ранее упомянули при обсуждении методических проблем, связанных с решением логарифмических уравнений.

Первый этап — технический. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow \dots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — анализ решения. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — проверка. Если проведенный анализ показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнию-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение (или каким-либо иным способом).

Реализация этого плана связана с четырьмя вопросами: как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием; какие преобразования могут привести данное уравнение в уравнение-следствие; если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена с громоздкими вычислениями; в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Советуем вам до детального обсуждения этих вопросов, каждому из которых отведен отдельный пункт параграфа, разобрать с учащимися несколько простых примеров, показывающих, что иногда на эти вопросы мы уже отвечали. Скажем, переход от уравнения $2^{5x-3} = 2^{7x+4}$ к уравнению $5x - 3 = 7x + 4$ является равносильным преобразованием по теореме, полученной в §40; корень последнего уравнения $x = -3,5$ является единственным корнем заданного показательного уравнения. Это был ответ на первый вопрос.

Переход от уравнения $\ln(5x - 3) = \ln(7x + 4)$ к уравнению $5x - 3 = 7x + 4$ является неравносильным преобразованием; корень последнего уравнения $x = -3,5$ является посторонним для заданного логарифмического уравнения. Это ответ на второй вопрос. Отвечали мы при решении логарифмических уравнений и на третий вопрос — как выполнять проверку корней. На этот вопрос мы отвечали и в 8 классе при решении рациональных уравнений с переменной в знаменателе, и при решении иррациональных уравнений (с квадратными корнями). Говорили мы и о том, что нельзя при решении уравнений делить обе части уравнения на выражение с переменной, что может привести к потере корней (например, в §18 при изучении метода решения однородных тригонометрических уравнений). Следовательно, цель §55 заключается в том, чтобы свести эти разрозненные представления в систему.

В п. 1 параграфа приведены шесть теорем о равносильности уравнений, которые изучались в курсе алгебры, начиная с 8 класса. Обратите внимание учащихся на то, что первые три теоремы гарантируют равносильность преобразований без всяких дополнительных условий, а три последние теоремы «работают» лишь при определенных условиях — их использование на практике сопряжено с необходимостью осуществления проверки. Более точный вывод сделан в п. 2: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив

выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировках теорем, то возможно появление посторонних корней.

После рассмотрения ряда примеров делается важный вывод: исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, обязательна проверка всех найденных корней, если:

1) произошло расширение области определения уравнения (за счет освобождения в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину; за счет освобождения от знаков корней четной степени; за счет освобождения от знаков логарифмов);

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (имеющее смысл всюду в области определения уравнения).

Обсуждая выше (в теме 7) методические проблемы, связанные с решением логарифмических уравнений, мы уже говорили о нашем отношении к столь любимому многими учителями опережающему отысканию ОДЗ. Тем не менее повторим еще раз. Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения иных причин нарушения равносильности, кроме расширения области определения, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется, например, метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит, лучше делать проверку подстановкой.

В последнем пункте § 55 указаны две основные причины потери корней при решении уравнений: деление обеих частей на одно и то же выражение $h(x)$; сужение ОДЗ в процессе решения уравнения. С первой причиной бороться нетрудно: можно просто запретить деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение. Со второй причиной бороться сложнее, можно лишь посоветовать, применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следить за тем, чтобы области определения правой и левой частей формулы были одинаковыми. В учебнике приведен достаточно очевидный пример на эту тему, здесь мы приведем еще один пример, более тонкий.

Пример. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

Решение. Воспользуемся универсальной подстановкой:

$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}; \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Получаем:

$$\frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} = 1,$$

откуда находим $u = 1$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Но, как легко видеть, уравнению удовлетворяют и значения $x = \pi + 2\pi n$. Когда же они успели «потеряться»? Когда мы заменили $\sin x$ и $\cos x$, которые определены при любых x , их выражениями через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, сужающими область определения. Для $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

появляется естественное ограничение: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. $x \neq \pi + 2\pi n$ — именно эти значения и «потерялись».

В §56 речь идет об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов. Выделены четыре метода:

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Функционально-графический метод.

Все они проиллюстрированы достаточно большим числом примеров. Большая подборка упражнений на эту тему имеется в задачнике, причем, обратите внимание, мы делаем упор на отработку общих идей и методов, а не на отработку навыков решения конкретных видов уравнений. Поэтому в задачнике в одном параграфе мирно уживаются и рациональные, и иррациональные, и показательные, и логарифмические, и тригонометрические уравнения.

В §57 речь идет о решении неравенств с одной переменной и прежде всего о принципиальных вопросах, связанных с решением неравенств: что такое равносильные неравенства, какие преобразования неравенств являются равносильными, а какие нет? Эти вопросы обсуждались в курсе алгебры, начиная с 8 класса, но мы снова возвращаемся к ним потому, что, завершая изучение школьного курса алгебры, целесообразно переосмыслить общие идеи и методы.

В начале параграфа напоминаются понятия частного и общего решения неравенства с одной переменной, равносильности неравенств, затем — системы неравенств, вводятся новые понятия — следствия неравенства, совокупности неравенств. Конечно, мы могли бы ввести понятие следствия неравенства еще в §45, при решении логарифмических неравенств, и фактически оно там используется (как бы на подсознательном уровне), да и понятие

совокупности (например, для уравнений) неявно применялось. Но, верные своей тактике, начиная с 7 класса, мы не стремимся сразу выходить на формальный уровень, предпочитаем сначала действовать на рабочем уровне. По той же причине только в этом параграфе переходим на формальный уровень и в тех рассуждениях, что применялись ранее при решении логарифмических неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Учащиеся знают, что при $a > 1$ следует перейти к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Теперь же их внимание обращается на то, что в каждой из систем есть по одному «лишнему» неравенству. В первой системе первое неравенство — следствие второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие в системе можно отбросить. Таким образом, первую систему можно заменить более простой:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично устанавливается, что вторую систему можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Принципиальное отличие неравенств от уравнений состоит в следующем: при решении уравнений мы не очень опасаемся того, что в результате некоторых преобразований получим уравнение-следствие, поскольку посторонние корни можно отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество, доводить дело до проверки нецелесообразно. Поэтому в неравенствах стараются выполнять только равносильные преобразования. Они описаны в шести теоремах, приведенных в § 57, и в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений, которые обсуждались в § 55.

Основная «техническая» идея решения большинства неравенств (неравенств с модулями, логарифмических, иррациональ-

ных) состоит в следующем: неравенство преобразуют в равносильную ему систему или в совокупность систем рациональных неравенств. Совокупность систем — довольно сложная конструкция, требующая (если вы решили обсуждать эти проблемы с учащимися) неспешного и детального рассмотрения, как это сделано, например, в учебнике при решении логарифмического неравенства $\log_{x-2} (2x - 3) > \log_{x-2} (24 - 6x)$, а также при обсуждении идеи решения иррациональных неравенств вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

или

$$\sqrt{f(x)} > g(x).$$

Устанавливается, что иррациональное неравенство первого вида равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2, \end{cases}$$

а иррациональное неравенство второго вида равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Завершается параграф разговором о решении неравенств с модулями; обсуждаются три способа их решения: 1) геометрический, основанный на том, что $|x - a|$ есть расстояние на числовой прямой между точками x и a ; 2) способ возведения в квадрат обеих частей неравенства (естественно, при условии их неотрицательности); 3) сведение неравенства к системе или совокупности систем более простых неравенств — этот способ основан на использовании определения модуля (иногда употребляется жаргон: «раскрытие модуля по определению») — это наиболее универсальный способ.

§ 58 с теоретической точки зрения особых сложностей не представляет, а вот трудных заданий в задачниках довольно много. Все они разобраны ниже, в главе 2.

В § 59 расширяются представления учащихся о решении систем уравнений: рассматриваются ранее не встречавшиеся классы систем уравнений (например, иррациональных), системы уравнений с тремя переменными.

Основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному; если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений. Существенно то, что метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые изучались в школе начиная с 7 класса, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнения другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Сделаем некоторые комментарии к тем примерам, которые решены в учебнике.

В примере 1 применяется метод умножения, который заключается в том, что система уравнений

$$\begin{cases} p_1(x; y) = q_1(x; y), \\ p_2(x; y) = q_2(x; y) \end{cases}$$

заменяется системой

$$\begin{cases} p_1(x; y) = q_1(x; y), \\ p_1(x; y) p_2(x; y) = q_1(x; y) q_2(x; y). \end{cases}$$

Могут ли при таком переходе появиться посторонние решения? Да: если пара $(x_0; y_0)$ обращает в 0 и $p_1(x; y)$ и $q_1(x; y)$, то она автоматически является решением второй системы, но может и не быть решением первой системы (ведь совсем не обязательно должно выполняться равенство $p_2(x_0; y_0) = q_2(x_0; y_0)$). Поэтому в учебнике и говорится, что поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод умножения уравнений системы, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему.

Кстати, примерно такая же фраза используется и в примере 2, где в системе уравнений одно из уравнений является иррациональным и в процессе преобразований на каком-то этапе применяется метод возведения в квадрат: от уравнения

$$\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} = 1$$

переходим к уравнению

$$\frac{3x - 2y}{2x} = 1^2.$$

На самом деле это преобразование является равносильным: во-первых, обе части первого уравнения неотрицательны и, во-вторых, расширение области определения, хотя и происходит, не может привести к неприятностям, поскольку значения переменных, при которых выполняется неравенство

$$\frac{3x - 2y}{2x} < 0,$$

здесь явно не «проскочат».

Завершается параграф примерами, в которых речь идет о решении систем с тремя переменными.

В § 60 речь идет о решении уравнений и неравенств с параметрами. К этой теме у учителей математики, как правило, особое отношение. Это в первую очередь связано с тем, что в последние годы стараниями вузовских приемных комиссий родился особый раздел элементарной математики — «конкурсная математика», в котором уравнения и неравенства с параметрами занимают почетное место. Сразу скажем, что мы не ставили своей целью в учебнике *для общеобразовательной школы* построить теорию или основы теории решения уравнений и неравенств с параметрами. Решению уравнений и неравенств с параметрами посвящена масса учебно-методической литературы. Мы свою задачу видели в следующем: завершая изучение курса алгебры в школе, дать учащимся некоторое представление о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого рассмотрен ряд примеров, но на уровень теоретических обобщений мы в учебнике сознательно не выходим. Сделаем это здесь.

Пусть дано уравнение $f(x; a) = 0$. Если ставится задача отыскать все такие пары $(x; a)$, которые удовлетворяют данному уравнению, то оно рассматривается как уравнение с двумя равноправными переменными x и a . Но можно поставить и другую задачу, полагая переменные неравноправными. Дело в том, что если придать переменной a какое-либо фиксированное значение, то $f(x; a) = 0$ превращается в уравнение с одной переменной x , и решения этого уравнения, естественно, зависят от выбранного значения a . Если уравнение $f(x; a) = 0$ нужно решить относительно переменной x , а под a понимается произвольное действительное число, то уравнение $f(x; a) = 0$ называют *уравнением с параметром a* . Основная трудность, связанная с решением уравнений (и тем более неравенств) с параметром, состоит в следующем. При одних значениях пара-

метра уравнение не имеет решений, при других имеет бесконечно много решений, при третьих оно решается по одним формулам, при четвертых — по другим. Как все это учесть?

Уравнение с параметром — это, по сути дела, краткая запись бесконечного семейства уравнений. Каждое из уравнений семейства получается из данного уравнения с параметром при конкретном значении параметра. Поэтому задачу решения уравнения с параметром можно сформулировать следующим образом: *решить уравнение с параметром $f(x; a) = 0$ — это значит решить семейство уравнений, получающихся из уравнения $f(x; a) = 0$ при любых действительных значениях параметра.*

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно, но, тем не менее, каждое уравнение из бесконечного семейства должно быть решено. Сделать это можно, если, например, по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра — множество действительных чисел или множество значений, заданное в условии задачи, — на подмножества, а затем заданное уравнение решить на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества полезно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит *качественное изменение* уравнения. Такие значения параметра можно назвать *контрольными* или *особыми*. Искусство решения уравнения с параметрами как раз и состоит в том, чтобы уметь находить контрольные значения параметра. Посмотрим с этой точки зрения на примеры, разобранные в § 60.

Пример 1. а) Решить относительно x уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$.

Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0, так как при таких значениях невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x (а при иных значениях параметра такое деление возможно; следовательно, меняется процедура решения уравнения, в этом и состоит *качественное изменение* уравнения). Это обуславливает разбиение множества значений параметра (множества действительных чисел) на два подмножества: $A_1 = \{0; 2\}$ и A_2 — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условиям $a \neq 0, a \neq 2$.

A_1 — конечное множество, поэтому можно по отдельности рассмотреть каждое значение параметра, принадлежащее множеству A_1 .

При $a = 0$ заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$; это уравнение не имеет корней.

При $a = 2$ заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$; этому уравнению удовлетворяют любые значения переменной x .

Если же параметр выбирается из множества A_2 , то коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим

$$x = \frac{a-2}{2a(a-2)}, \text{ т. е. } x = \frac{1}{2a}.$$

Пример 1. б) Решить относительно x неравенство

$$2a(a-2)x > a-2.$$

Здесь опять контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0. Но для оценки качественного изменения неравенства следует учесть, что процедура решения неравенства зависит от знака коэффициента при x . Если этот коэффициент положителен, то мы используем одну теорему о равносильности неравенств, постулирующую сохранение знака неравенства; если этот коэффициент отрицателен, то мы используем другую теорему, постулирующую изменение знака неравенства. Поэтому, осуществляя разбиение множества всех значений параметра (множества действительных чисел) на подмножества, целесообразно сохранить указанное выше множество A_1 , а множество остальных значений параметра разбить на три части: $A_2 = (-\infty; 0)$, $A_3 = (0; 2)$, $A_4 = (2; +\infty)$. Таким образом, для решения заданного неравенства надо рассмотреть не три случая, как это было выше при решении аналогичного уравнения, а пять:

- | | |
|--------------|------------------|
| 1) $a = 0$; | 4) $0 < a < 2$; |
| 2) $a = 2$; | 5) $a > 2$. |
| 3) $a < 0$; | |

В первом случае (при $a = 0$) заданное неравенство принимает вид

$$0 \cdot x > -2;$$

этому неравенству удовлетворяют любые значения переменной x .

Во втором случае (при $a = 2$) заданное неравенство принимает вид

$$0 \cdot x > 0;$$

это неравенство не имеет решений.

В третьем (при $a < 0$) и в пятом случаях (при $a > 2$) коэффициент $2a(a-2)$ положителен, значит, разделив на него обе части заданного неравенства, его знак следует оставить таким, каким он был:

$$x > \frac{a-2}{2a(a-2)}, \text{ т. е. } x > \frac{1}{2a}.$$

В четвертом случае (когда $0 < a < 2$) коэффициент $2a(a - 2)$ отрицателен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, его знак следует изменить на противоположный:

$$x < \frac{a - 2}{2a(a - 2)}, \text{ т. е. } x < \frac{1}{2a}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x^2 обращается в 0. Дело в том, что если этот коэффициент равен нулю, то уравнение превращается в линейное и решается по соответствующему алгоритму; если же этот коэффициент отличен от нуля, то имеем квадратное уравнение, которое решается по иному алгоритму (меняется процедура решения, в этом и состоит *качественное изменение уравнения*). Контрольным является значение $a = 1$. Это обуславливает разбиение множества значений параметра (множества действительных чисел) на два подмножества: $A_1 = \{1\}$ и A_2 — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $a \neq 1$.

В первом случае (при $a = 1$) уравнение принимает следующий вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$. Решив это линейное уравнение, получим $x = -\frac{7}{6}$.

Во втором случае (при $a \neq 1$) имеем квадратное уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Найдем его дискриминант $D = 4(5a + 4)$. Дальнейшие рассуждения зависят от значения дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$ (можно сказать, что это — второе контрольное значение параметра; при переходе через него происходит *качественное изменение уравнения* — меняется число корней уравнения). Следовательно, указанное выше множество A_2 , в свою очередь, целесообразно разбить на три подмножества: $A_3 = \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, $A_4 = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$, $A_5 = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то $D < 0$ и, следовательно, квадратное уравнение не имеет корней.

Если $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним, $a \neq 1$), то $D > 0$ и, значит, квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Если $a = -\frac{4}{5}$, то $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

В нашем курсе алгебры, начиная с 7 класса, приоритетной является, как мы постоянно подчеркиваем, функционально-графическая линия. При решении задач с параметрами графические модели часто оказываются более эффективными, чем аналитические. Это наглядно демонстрируют примеры 3 и 4, разобранные в учебнике, и достаточно трудные упражнения из задачника, разобранные ниже, во второй части данного методического пособия.

решение некоторых упражнений из задачника

глава 1

1.13. Найти область значений функции:

а) $y = \frac{1}{16x^2 - 49}$; б) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$; в) $y = \frac{1}{9 - 25x^2}$;

г) $y = \sqrt{3x - x^2 + 18}$.

Решение. а) Имеем: $-49 \leq 16x^2 - 49 < +\infty$. Если $16x^2 - 49 > 0$, то $0 < \frac{1}{16x^2 - 49} < +\infty$. Если $-49 \leq 16x^2 - 49 < 0$, то $-\infty < \frac{1}{16x^2 - 49} \leq -\frac{1}{49}$.

Значит, $E(f) = \left(-\infty; -\frac{1}{49}\right] \cup (0; +\infty)$.

б) Имеем: $x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$. Это выражение принимает все значения, большие или равные -1 , в частности все неотрицательные значения. Значит, $E(f) = [0; +\infty)$.

в) Имеем: $-\infty < 9 - 25x^2 \leq 9$. Если $9 - 25x^2 > 0$, то $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{9 - 25x^2} < +\infty$. Если $16x^2 - 49 < 0$, то $-\infty < \frac{1}{9 - 25x^2} < 0$. Значит, $E(f) = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

г) Имеем: $3x - x^2 + 18 = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 18 + \frac{9}{4} = 20,25 - (x - 1,5)^2$.

Это выражение принимает все значения, меньшие или равные $20,25$, но нас интересуют только неотрицательные значения этого выражения, т. е. $0 \leq 3x - x^2 + 18 \leq 20,25$. Значит, $0 \leq \sqrt{3x - x^2 + 18} \leq \sqrt{20,25}$, а потому $E(f) = [0; 4,5]$.

1.15. Используя график функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (рис. 10), построить график функции: а) $y = f(|x|)$; б) $y = |f(x)|$; в) $y = |f(|x|)$; г) $y = -|f(x)|$.

Решение. а) Оставляем ту часть графика, которая расположена пра-

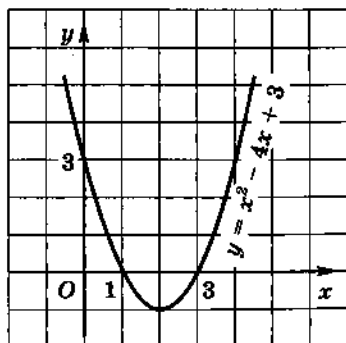


Рис. 10

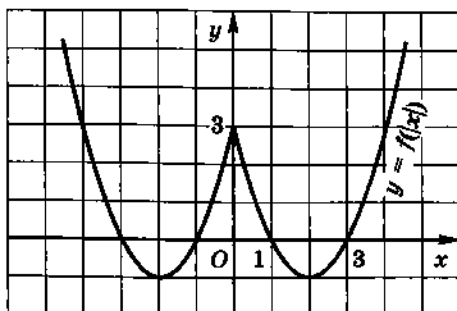


Рис. 11

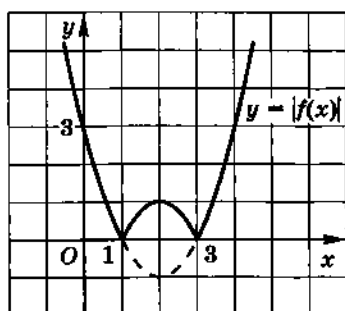


Рис. 12

вее оси ординат, и добавляем симметричную ей относительно оси ординат (рис. 11).

б) Оставляем те части графика, которые расположены выше оси абсцисс, а ту часть, которая расположена ниже оси абсцисс, заменяем симметричной ей относительно оси абсцисс (рис. 12).

в) Над графиком из пункта а) осуществляем преобразования, указанные в пункте б) (рис. 13).

г) График, построенный в пункте в), симметрично отображаем относительно оси абсцисс (рис. 14).

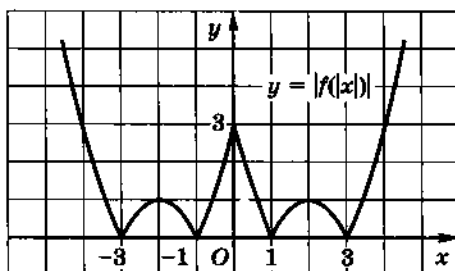


Рис. 13

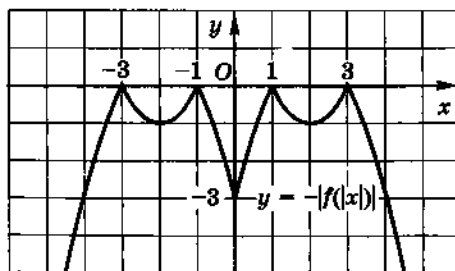


Рис. 14

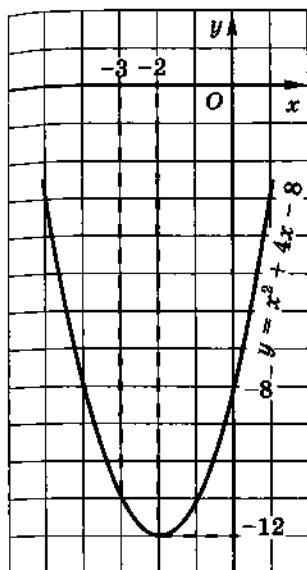


Рис. 15

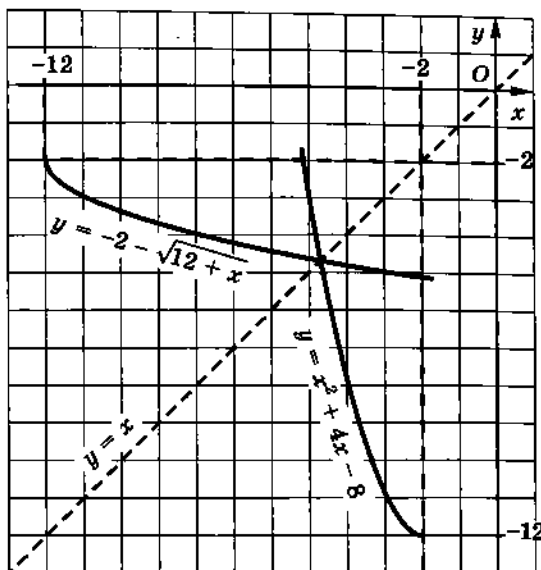


Рис. 16

3.5. Выяснить, существует ли обратная функция для заданной функции. Если да, то задать обратную функцию аналитически; построить график заданной и обратной функций:

- а) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in [-3; 0]$;
- б) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in (-\infty; -2]$;
- в) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [0; 3]$;
- г) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [3; +\infty)$.

Решение. а) На рисунке 15 изображен график функции $y = x^2 + 4x - 8$. На отрезке $[-3; 0]$ эта функция необратима.

б) На луче $(-\infty; -2]$ функция монотонна, значит, обратима. Из уравнения $y = x^2 + 4x - 8$ находим: $x^2 + 4x - (8 + y) = 0$;
 $x = -2 \pm \sqrt{12 + y}$.

Но по условию $x \leq -2$, значит, берем только одно решение: $x = -2 - \sqrt{12 + y}$. Осталось поменять x и y местами: $y = -2 - \sqrt{12 + x}$. Графики заданной и обратной функций представлены на рисунке 16.

в) На рисунке 17 изображен график функции $y = -x^2 + 2x + 6$. На отрезке $[0; 3]$ эта функция необратима.

г) На луче $[3; +\infty)$ функция монотонна, значит, обратима. Из уравнения $y = -x^2 + 2x + 6$ находим: $x^2 - 2x + (y - 6) = 0$;
 $x = 1 \pm \sqrt{7 - y}$.

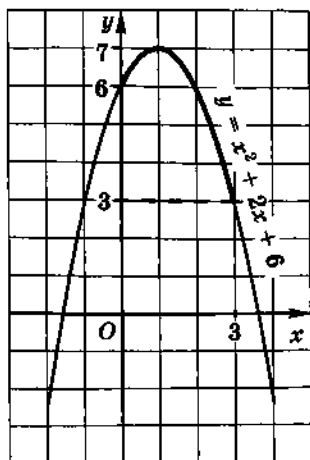


Рис. 17

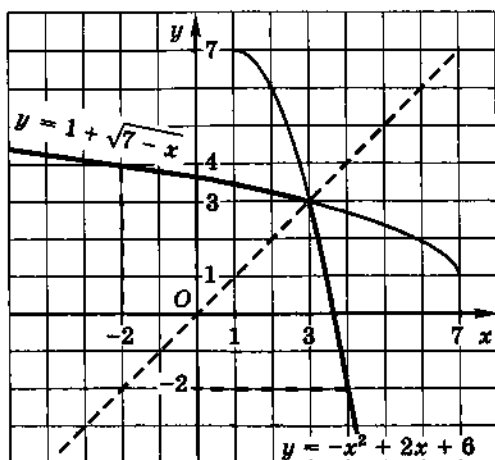


Рис. 18

Но по условию $x \geq 3$, значит, берем только одно решение: $x = 1 + \sqrt{7 - y}$. Осталось поменять x и y местами: $y = 1 + \sqrt{7 - x}$. Графики заданной и обратной функций представлены на рисунке 18.

Глава 2

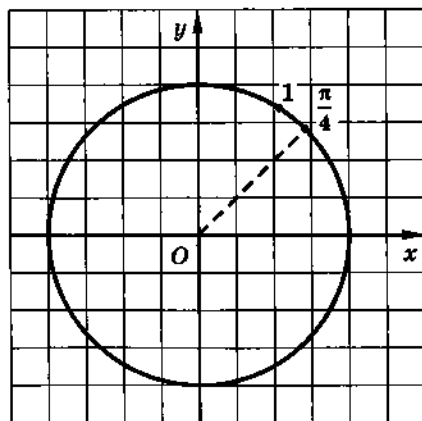


Рис. 19

6.34. Сравнить числа a и b , если: б) $a = \cos 2$, $b = \sin 2$; г) $a = \sin 1$, $b = \cos 1$.

Решение. б) $t = 2$ — точка второй четверти числовой окружности. Значит, $\cos 2 < 0$, $\sin 2 > 0$, т. е. $a < b$.

г) $t = 1$ — точка первой четверти числовой окружности, расположенная выше середины первой четверти, поскольку $\frac{\pi}{4} < 1$ (рис. 19). Значит, ордината точки 1 больше ее абсциссы, а потому $\sin 1 > \cos 1$, т. е. $a > b$.

6.35. Определить знак разности:

б) $\sin 1 - \sin 1,1$; г) $\cos 1 - \cos 0,9$.

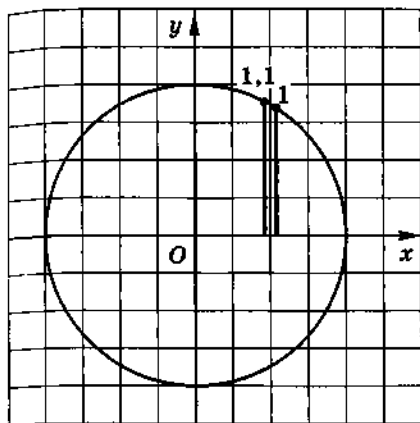


Рис. 20

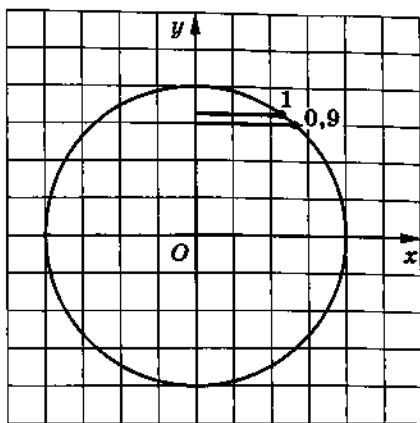


Рис. 21

Решение. б) $\sin 1 < \sin 1,1$ (рис. 20), значит, $\sin 1 - \sin 1,1 < 0$.
 г) $\cos 1 < \cos 0,9$ (рис. 21), значит, $\cos 1 - \cos 0,9 < 0$.

6.37. Расположить в порядке возрастания числа:

а) $\sin 2, \sin 3, \cos 4, \cos 5$;

б) $\cos 3, \cos 4, \cos 6, \cos 7$;

в) $\sin 3, \sin 4, \sin 6, \sin 7$;

г) $\cos 2, \cos 3, \sin 4, \sin 5$.

Решение. а) Отметим точки 2, 3, 4, 5 на числовой окружности (рис. 22). Отмечаем, что точка 4 принадлежит третьей четверти, точки 2 и 3 — второй, точка 5 — четвертой четверти числовой окружности, следовательно, $\cos 4 < 0$, остальные заданные числа — положительные.

Далее, расстояние (по окружности) от точки 3 до точки С примерно равно 0,14, расстояние от точки D до точки 5 примерно 0,29 (точка D соответствует числу $\frac{3\pi}{2}$, т.е. 4,71), расстояние от точки 2 до точки С примерно 1,14. Значит, длины дуг 2С, 3С, D5 связаны следующим образом: $3С < D5 < 2С$.

Аналогичным образом связаны между собой отрезки P3, M5, K2. Имеем $P3 < M5 < K2$. Это значит, что $\sin 3 < \cos 5 < \sin 2$.

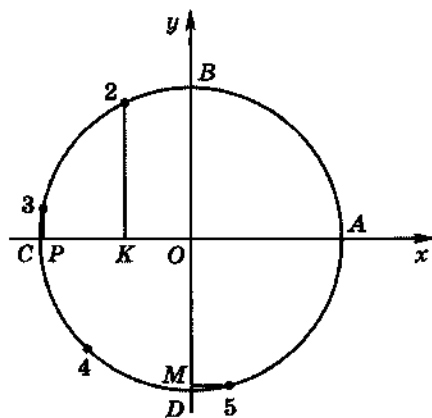


Рис. 22

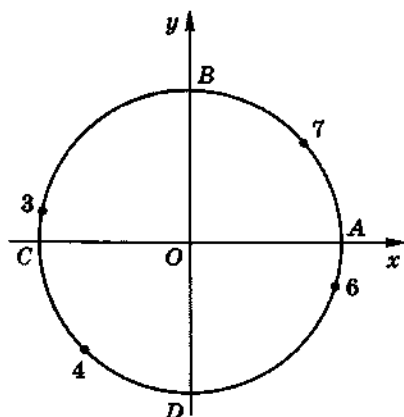


Рис. 23

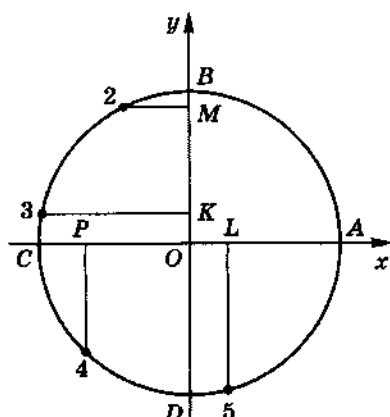


Рис. 24

В итоге получаем следующее расположение заданных чисел в порядке возрастания: $\cos 4$, $\sin 3$, $\cos 5$, $\sin 2$.

б) Отметим точки 3, 4, 6, 7 на числовой окружности (рис. 23). Сразу замечаем, что точка 3 располагается ближе к точке C, чем точка 4, а точка 6 — ближе к точке A, чем точка 7. Сравнив абсциссы (т.е. косинусы) точек 3, 4, 6, 7, приходим к выводу, что $\cos 3 < \cos 4 < \cos 7 < \cos 6$. Заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\cos 3, \cos 4, \cos 7, \cos 6.$$

в) Сравнив ординаты (т.е. синусы) точек 3, 4, 6, 7 (см. рис. 23), приходим к выводу, что $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 7$. Заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\sin 4, \sin 6, \sin 3, \sin 7.$$

г) Отметим точки 2, 3, 4, 5 на числовой окружности (рис. 24) и сразу заметим, что все заданные числа отрицательны. Сравним по длине отрезки 2M, 3K, 4P, 5L — это соответственно $-\cos 2$, $-\cos 3$, $-\sin 4$, $-\sin 5$. Замечаем, что точка 3 располагается на окружности ближе к C, чем 2 к C, 4 к D и 5 к D. Следовательно, отрезок 3K — наибольший по длине. Далее, точка 2 располагается к B ближе, чем 4 к C, а 4 к C ближе, чем 5 к A. Значит, $2M < 4P < 5L$. Итак,

$$2M < 4P < 5L < 3K,$$

поэтому $-\cos 2 < -\sin 4 < -\sin 5 < -\cos 3$. Заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\cos 3, \sin 5, \sin 4, \cos 2.$$

6.38. Расположить в порядке возрастания числа:

а) 1, $\sin 1$, $\cos 1$, $\operatorname{tg} 1$;

б) 2, $\sin 2$, $\cos 2$, $\operatorname{ctg} 2$.

Решение. а) Так как $\frac{\pi}{4} < 1$, то $\cos 1 < \sin 1$ (рис. 25), а $\operatorname{tg} 1 > 1$. Следовательно, $\cos 1 < \sin 1 < 1 < \operatorname{tg} 1$.

б) Здесь $\sin 2 > 0$, $\cos 2 < 0$, $\operatorname{ctg} 2 < 0$. Используя свойства числовых неравенств, получаем:

$$\sin 2 < 1;$$

$$\frac{1}{\sin 2} > 1;$$

$$\frac{\cos 2}{\sin 2} < \cos 2;$$

$$\operatorname{ctg} 2 < \cos 2.$$

Итак,

$$\operatorname{ctg} 2 < \cos 2 < \sin 2 < 2.$$

7.19. Вычислить $\sin t + \cos t$, если

$$\operatorname{tg} t - \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{7}{12} \text{ и } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Положив $\operatorname{tg} t = x$, получим уравнение $x - \frac{1}{x} = -\frac{7}{12}$ с корнями $\frac{3}{4}$ и $-\frac{4}{3}$. Так как $0 < t < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\operatorname{tg} t > 0$, из двух найденных значений x выбираем первое, т. е. получаем, что $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$. Зная $\operatorname{tg} t$, находим, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $\cos t = \frac{4}{5}$. В итоге имеем:

$$\sin t + \cos t = 1,4.$$

7.20. Построить график функции:

а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

б) $y = \cos^2 \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{1}{x}$;

в) $y = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \sqrt{x}$;

г) $y = \sin^2 \frac{1}{x^2 - 4} + \cos^2 \frac{1}{x^2 - 4}$.

Решение. Во всех случаях основой графика функции служит прямая $y = 1$. Нужно лишь учесть область определения

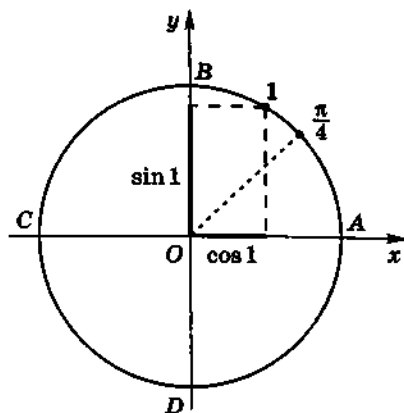


Рис. 25

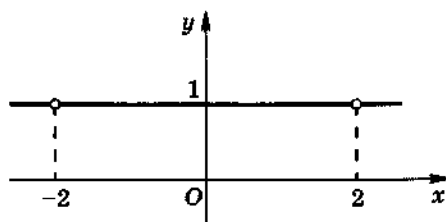


Рис. 26

функции. В примере а) областью определения функции является вся числовая прямая. В примере б) имеем $x \neq 0$, значит, появится «выколотая» точка $(0; 1)$. В примере в) имеем $x \geq 0$, следовательно, графиком служит луч $y = 1, x \geq 0$. Наконец, в примере г) из прямой $y = 1$ следует «выколоть» две точки: $(-2; 1)$ и $(2; 1)$ (рис. 26).

10.12. Решить графически уравнение:

а) $\sin x = \frac{2}{\pi}x$; б) $\sin x = -\frac{4}{\pi}x + 3$.

Решение. а) Прямая $y = \frac{2}{\pi}x$ проходит через точки $(0; 0)$, $(\frac{\pi}{2}; 1)$, $(-\frac{\pi}{2}; -1)$. Через эти точки проходит и график функции $y = \sin x$ (рис. 27). Значит, уравнение имеет три корня: $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

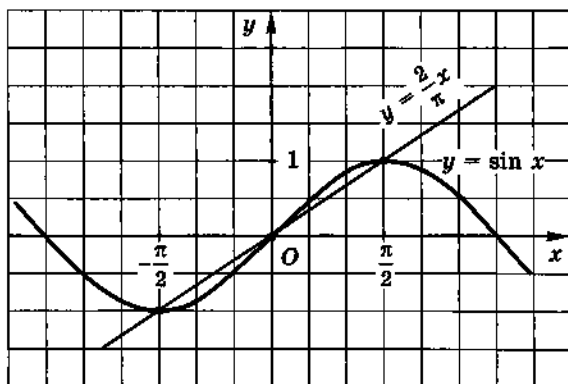


Рис. 27

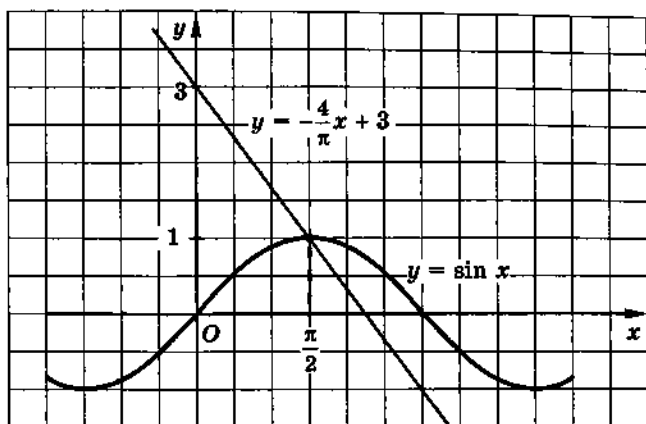


Рис. 28

б) Прямая $y = -\frac{4}{\pi}x + 3$ проходит через точки $(0; 3)$ и $(\frac{\pi}{2}; 1)$, она имеет с графиком функции $y = \sin x$ (рис. 28) одну общую точку $(\frac{\pi}{2}; 1)$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = \frac{\pi}{2}$.

10.13. а) Решить графически уравнение $\sin x - \sqrt{x - \pi} = 0$.

Решение. Графиком функции $y = \sqrt{x - \pi}$ является ветвь параболы с вершиной в точке $(\pi; 0)$; она имеет с графиком функции $y = \sin x$ именно эту единственную общую точку (рис. 29). Значит, $x = \pi$ — единственный корень заданного уравнения.

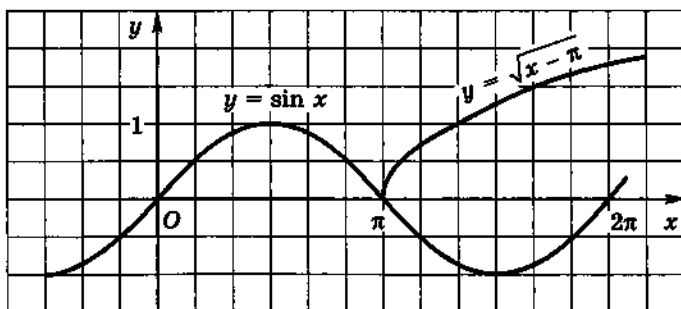


Рис. 29

10.15. Дано: $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Доказать, что $f(\sin x) = 3 - 2\cos^2 x - \sin x$.

Прежде чем приводить решение этой несложной задачи, заметим, что в этом параграфе, равно как в любом параграфе задач-

ника, где речь идет об изучении какой-либо новой для учащихся функции, в системе упражнений представлено то, что мы называем *инвариантным ядром* — фиксированным набором сюжетов. Инвариантное ядро (напомним, мы говорили об этом в первой части в п. 2 темы 1) состоит из шести направлений: графическое решение уравнений, отыскание наименьшего и наибольшего значений функции на заданном промежутке, преобразование графиков, функциональная символика, кусочные функции и чтение графика. В § 10 есть все сюжеты, причем рассматриваемый номер 10.15 — это пример на функциональную символику.

Решение. $f(\sin x) = 2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) - \sin x + 1 = 3 - 2\cos^2 x - \sin x$.

11.10. Решить графически уравнение:

а) $\cos x = \sqrt{x} + 1$; б) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$; в) $\cos x = -(x - \pi)^2 - 1$;

г) $\cos x = |x| + 1$.

Решение. а) $x = 0$ (рис. 30); б) $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 31); в) $x = \pi$ (рис. 32); г) $x = 0$ (рис. 33).

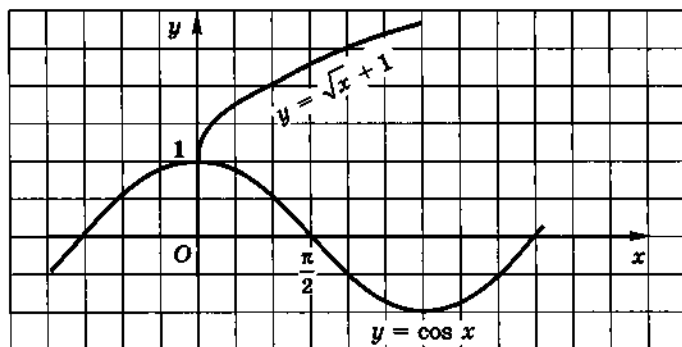


Рис. 30

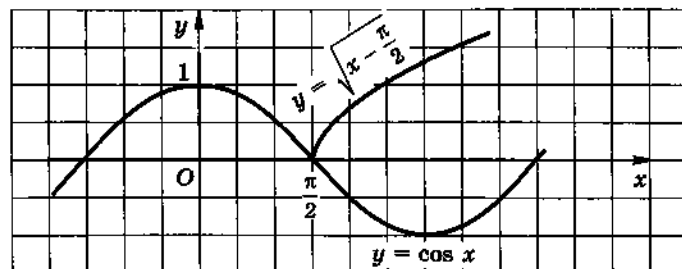


Рис. 31

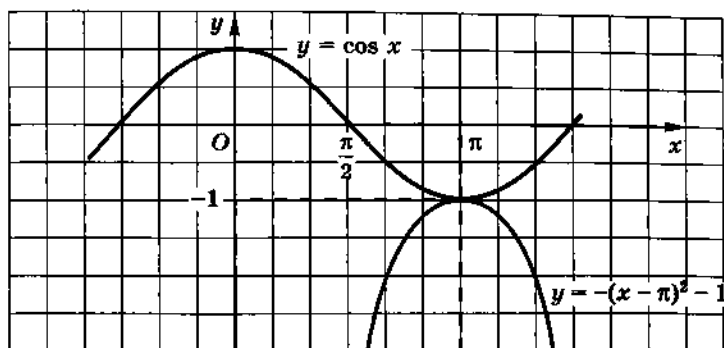


Рис. 32

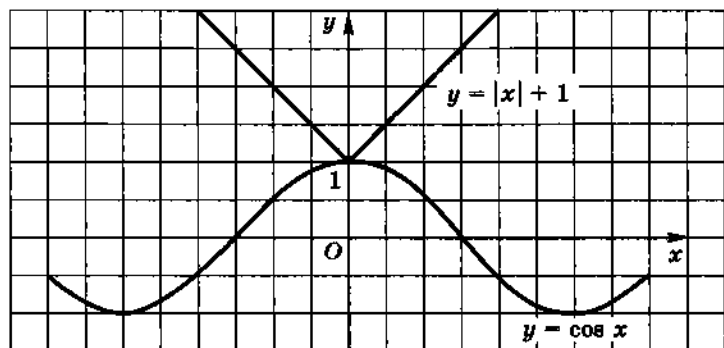


Рис. 33

11.13. а) Дано: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Доказать, что $-f(\cos x) = 2 \sin^2 x + 3 \cos x$.

Решение. $-f(\cos x) = -(2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2) = 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 2 \sin^2 x + 3 \cos x$.

13.9. Составить возможное аналитическое задание функции по ее графику, изображенному: а) на рисунке 34; б) на рисунке 35.

Решение. а) При $x \leq 0$ представлена левая ветвь стандартной параболы $y = x^2$. При $x > 0$ график представляет собой арку синусоиды, сжатой в 2 раза к оси абсцисс. Судя по тому, что кривая явно заканчивается в точке $(\pi; 0)$, делаем вывод: $y = 0,5 \sin x$, $0 < x \leq \pi$. В итоге получаем следующее задание кусочной функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0; \\ 0,5 \sin x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

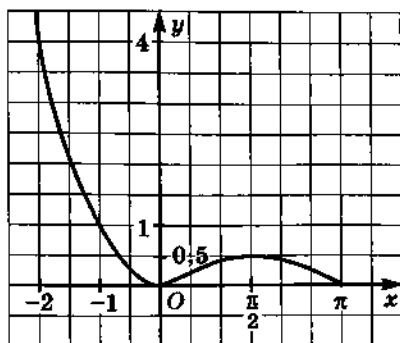


Рис. 34

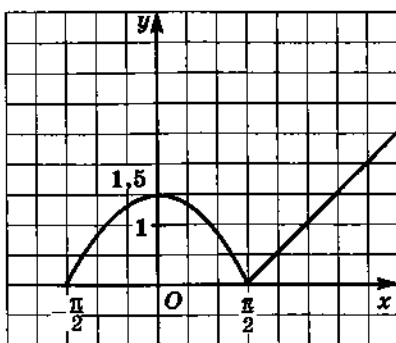


Рис. 35

б) Здесь мы имеем арку косинусоиды на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, растянутой от оси абсцисс с коэффициентом 1,5, и прямую линию с угловым коэффициентом 1, проходящую через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Уравнение прямой $y = x - \frac{\pi}{2}$, она рассматривается на открытом луче $\left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$. В итоге получаем следующее задание кусочной функции:

$$y = \begin{cases} 1,5 \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

13.20. Составить возможное аналитическое задание функции по ее графику (предполагается, что $D(f) = \mathbb{R}$), изображенному: а) на рисунке 36; б) на рисунке 37; в) на рисунке 38; г) на рисунке 39.

Решение. а) В левой координатной полуплоскости представлен график функции $y = -x$; в правой — синусоида, сжатая

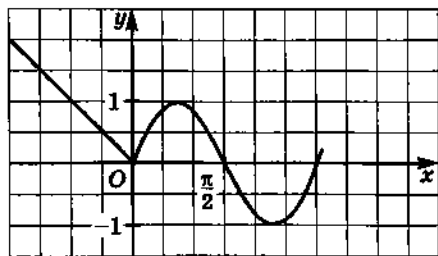


Рис. 36

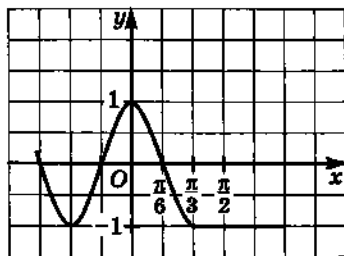


Рис. 37

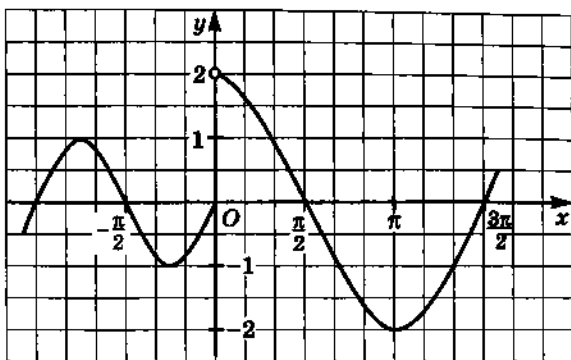


Рис. 38

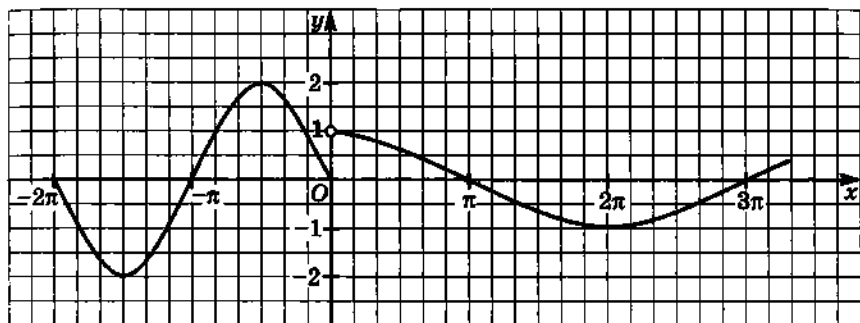


Рис. 39

к оси ординат с коэффициентом 2, т. е. график функции $y = \sin 2x$. В итоге получаем следующее задание кусочной функции:

$$y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ \sin 2x, & x > 0. \end{cases}$$

б) На луче $\left[-\infty; \frac{\pi}{3}\right]$ представлена косинусоида, сжатая к оси ординат в три раза, т. е. это — график функции $y = \cos 3x$. При $x > \frac{\pi}{3}$ имеем прямую линию $y = -1$. В итоге получаем следующее задание кусочной функции:

$$y = \begin{cases} \cos 3x, & x \leq \frac{\pi}{3}; \\ -1, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

в) В левой координатной полуплоскости представлена синусоида, сжатая в два раза к оси ординат, — это график функции $y = \sin 2x$. В правой полуплоскости изображена косинусоида, растянутая от оси абсцисс с коэффициентом 2, — это график функции $y = 2 \cos x$. В итоге получаем следующее задание кусочной функции:

$$y = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0; \\ 2 \cos x, & x > 0. \end{cases}$$

г) В левой координатной полуплоскости представлена синусоида, растянутая в два раза от оси абсцисс и симметрично отраженная от оси абсцисс, — это график функции $y = -2 \sin x$. В правой полуплоскости изображена косинусоида, растянутая от оси ординат с коэффициентом 2, — это график функции $y = \cos \frac{x}{2}$. В итоге получаем следующее задание кусочной функции:

$$y = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq 0; \\ \cos \frac{x}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

14.13. Построить график функции:

а) $y = 2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

б) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$.

Решение. В задании а) графиком служит прямая $y = 2$ с серией выколотых точек $x = \frac{\pi n}{2}$. В задании б) речь идет о графике функции $y = \sqrt{x} + 1$, где $x \geq 0$ и $x \neq \frac{\pi n}{2}$. График представлен на рисунке 40.

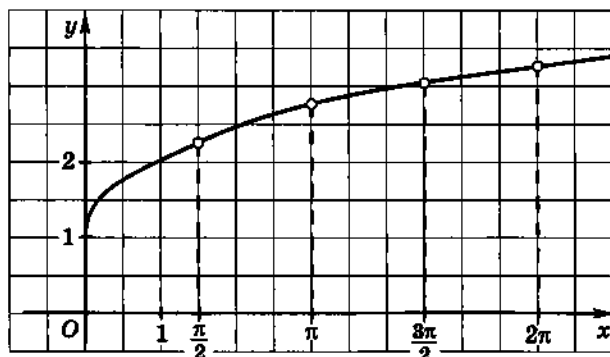


Рис. 40

14.14. Построить график функции:

а) $y = \cos^2(\operatorname{tg} x) + \sin^2(\operatorname{tg} x)$;

б) $y = 2 \sin^2(\operatorname{ctg} x) + 2 \cos^2(\operatorname{ctg} x)$.

Решение. а) Графиком служит прямая $y = 1$, у которой выколоты точки с абсциссами $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

б) Графиком служит прямая $y = 2$, у которой выколоты точки с абсциссами $x = \pi n$ (рис. 41).

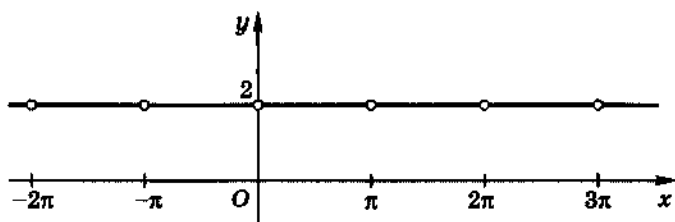


Рис. 41

14.15. Построить график функции:

а) $y = \operatorname{tg}(\cos x) \operatorname{ctg}(\cos x)$;

б) $y = -2 \operatorname{tg}(\sin x) \operatorname{ctg}(\sin x)$.

Решение. а) Область определения функции задается условием $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$. Значит, графиком служит прямая $y = 1$, у которой выколоты точки с абсциссами $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

б) Область определения функции задается условием $\sin x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi n$. Следовательно, графиком служит прямая $y = -2$, у которой выколоты точки с абсциссами $x = \pi n$.

Глава 3

15.16. Построить график функции:

а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$; б) $y = \cos(\arccos x)$.

Решение. а) Для построения графика нужно учесть два обстоятельства:

1) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$; 2) область определения заданной функции $D(f) = [-1; 1]$. Таким образом, речь идет о построении графика постоянной функции $y = \pi$, $x \in [-1; 1]$.

б) Для построения графика нужно учесть два обстоятельства:

1) $\cos(\arccos x) = x$;

2) область определения заданной функции $D(f) = [-1; 1]$. Таким образом, речь идет о построении графика функции $y = x$, $x \in [-1; 1]$.

Заметим, что известный «экзотический» график — график функции $y = \arccos(\cos x)$ мы не рискнули включить в задаче-

ник для базового уровня: соответствующую «пилу» предлагается построить лишь в задачнике для 10 класса профильного уровня.

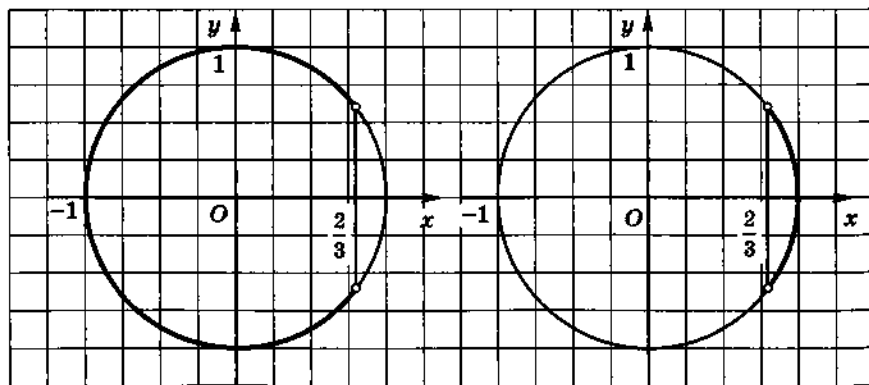
15.18. Решить неравенство: а) $\cos t < \frac{2}{3}$; б) $\cos t > -\frac{1}{7}$;
в) $\cos t > \frac{2}{3}$; г) $\cos t < -\frac{1}{7}$.

Решение. а) В принципе тригонометрические неравенства не входят в стандарт математического образования на базовом уровне. Тем не менее они имеют важное значение для правильного понимания как основной математической модели, на которой строится в школе теория тригонометрических функций — числовой единичной окружности на координатной плоскости, так и самих определений синуса и косинуса как координат точки числовой окружности.

На рисунке 42, а изображена дуга числовой окружности, состоящая из точек с абсциссой меньше чем $\frac{2}{3}$. Начинается эта дуга в точке $\arccos \frac{2}{3}$, а заканчивается в точке $2\pi - \arccos \frac{2}{3}$ (если двигаться только по первому обходу числовой окружности в положительном направлении). В итоге получаем:

$$\arccos \frac{2}{3} + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k.$$

Делать стандартную в таких случаях приписку $k \in \mathbb{Z}$, на наш взгляд, на уроках и при выполнении домашних заданий не обязательно, есть общая договоренность. В контрольных и экзаменационных работах, где действуют другие правила игры, эту запись делать приходится.



а

б

Рис. 42

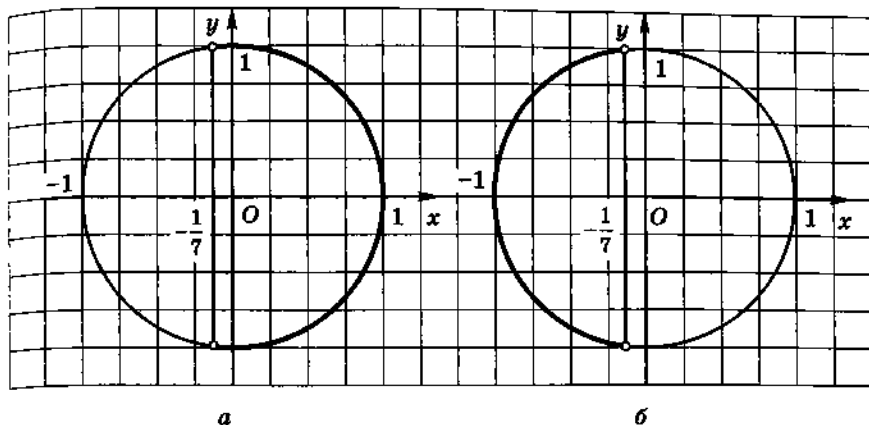


Рис. 43

б) На рисунке 43, а изображена дуга числовой окружности, состоящая из точек с абсциссой больше чем $-\frac{1}{7}$. Начинается эта дуга в точке $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$, а заканчивается в точке $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ (двигаемся по первому отрицательному и первому положительному обходу числовой окружности в положительном направлении). В итоге получаем: $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k < t < \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k$.

в) Рассуждая как в пункте б), получаем: $-\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k < t < \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$ (рис. 42, б).

г) Рассуждая как в пункте а), получаем: $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k$ (рис. 43, б).

15.19. Решить неравенство: а) $3\cos^2 t - 4\cos t \geq 4$; б) $6\cos^2 t + 1 > 5\cos t$; в) $3\cos^2 t - 4\cos t < 4$; г) $6\cos^2 t + 1 \leq 5\cos t$.

Решение. а) Решив уравнение $3\cos^2 t - 4\cos t - 4 = 0$, получим: $\cos t = 2$ или $\cos t = -\frac{2}{3}$. Заданное неравенство сводится к совокупности двух неравенств: $\cos t \leq -\frac{2}{3}$; $\cos t \geq 2$. Второе неравенство не имеет решений, а из первого получаем (рис. 44, а):

$$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k \leq t \leq 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k.$$

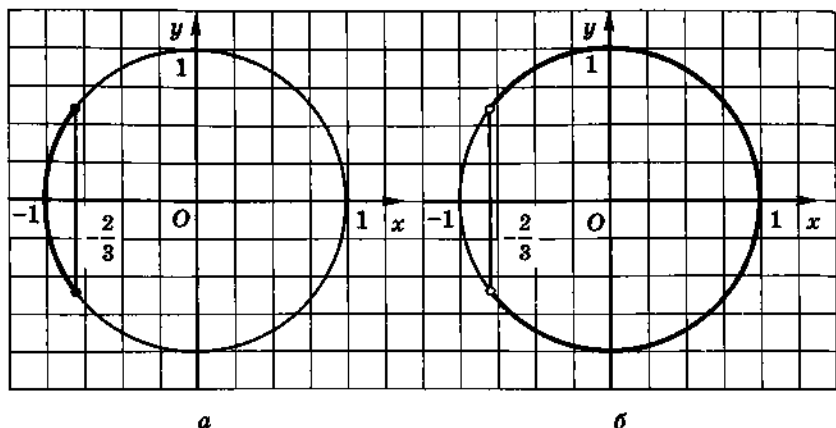


Рис. 44

В пункте в) получаем: $-\frac{2}{3} < \cos t < 2$. Ясно, что достаточно ограничиться левой частью этого двойного неравенства. Получаем (рис. 44, б):

$$-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k < t < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k.$$

б) Решив уравнение $6 \cos^2 t - 5 \cos t + 1 = 0$, получим: $\cos t = \frac{1}{2}$ или $\cos t = \frac{1}{3}$.

Заданное неравенство сводится к совокупности двух неравенств: $\cos t < \frac{1}{3}$; $\cos t > \frac{1}{2}$. Из первого неравенства получаем (рис. 45, а):

$$\arccos \frac{1}{3} + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k.$$

Из второго неравенства получаем (см. рис. 45, а):

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

г) Здесь задача сводится к решению двойного неравенства $\frac{1}{3} \leq \cos t \leq \frac{1}{2}$. Получаем (рис. 45, б):

$$-\arccos \frac{1}{3} + 2\pi k \leq t \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k.$$

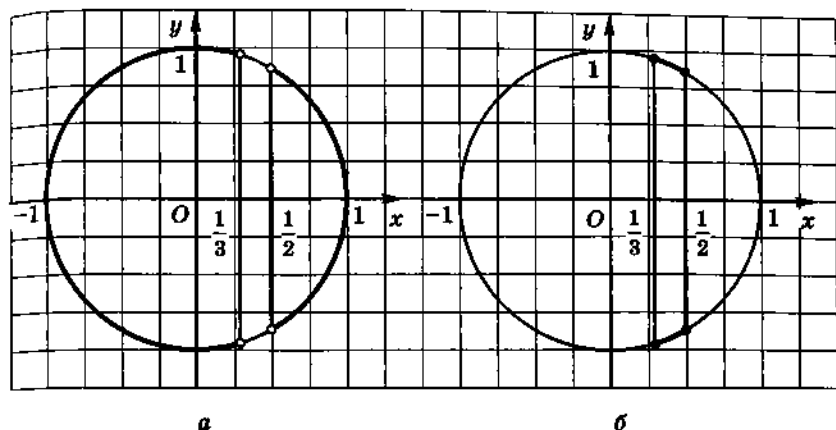


Рис. 45

15.21. Вычислить: а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; б) $\sin(\arccos(-0,8))$.

Решение. а) Пусть $\arccos\frac{3}{5} = t$. Тогда $\cos t = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$; надо вычислить $\sin t$.

После такой переформулировки задача не представляет никакого труда: $\sin t = \frac{4}{5}$.

б) Пусть $\arccos(-0,8) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$; надо вычислить $\sin t$.

И здесь после переформулировки задача труда не представляет: $\sin t = \frac{3}{5}$.

15.22. Вычислить: а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

Решение. а) Пусть $\arccos\left(-\frac{5}{13}\right) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$; надо вычислить $\operatorname{tg} t$. Имеем $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, откуда находим $\operatorname{tg}^2 t = \frac{144}{25}$. Поскольку t — аргумент из второй четверти, получаем: $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$.

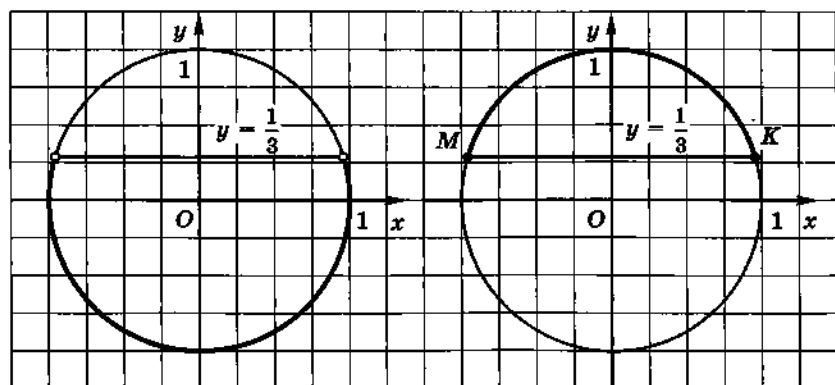
б) Пусть $\arccos \frac{4}{5} = t$. Тогда $\cos t = \frac{4}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$; надо вычислить $\operatorname{ctg} t$. Имеем: $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, откуда находим: $\operatorname{tg}^2 t = \frac{9}{16}$, $\operatorname{ctg}^2 t = \frac{16}{9}$. Поскольку t — аргумент из первой четверти, получаем: $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

16.16. Решить неравенство: а) $\sin t < \frac{1}{3}$; б) $\sin t \geq -0,6$;
в) $\sin t \geq \frac{1}{3}$; г) $\sin t < -0,6$.

Решение. а) На рисунке 46, а изображена дуга числовой окружности, состоящая из точек с ординатой меньше, чем $\frac{1}{3}$. Начинается эта дуга в точке $\pi - \arcsin \frac{1}{3}$, а заканчивается в точке $2\pi + \arcsin \frac{1}{3}$; самое главное заключается в том, что мы из начальной точки дошли до точки 2π и начали обходить числовую окружность по второму разу. В итоге получаем: $\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k < t < 2\pi + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k$. Заметим, что ответ можно записать и по-другому: $-\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k < t < \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k$.

б) Геометрическое решение заданного неравенства — дуга KM (рис. 47, а) с началом в точке $K(-\arcsin 0,6)$ и с концом в точке $M(\pi + \arcsin 0,6)$. Эта геометрическая модель позволяет перейти к аналитической записи решения заданного неравенства:

$$-\arcsin 0,6 + 2\pi k \leq t \leq \pi + \arcsin 0,6 + 2\pi k.$$



а

б

Рис. 46

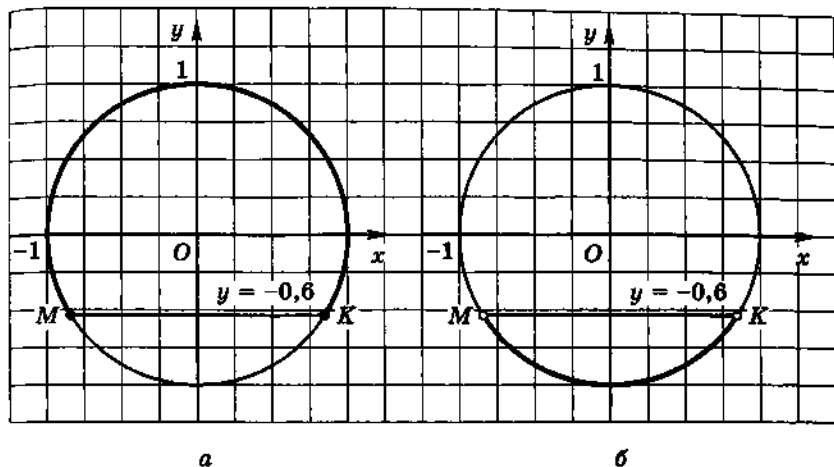


Рис. 47

в) Геометрическое решение заданного неравенства — дуга KM (рис. 46, б) с началом в точке $K\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$ и с концом в точке $M\left(\pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$. Эта геометрическая модель позволяет перейти к аналитической записи решения заданного неравенства:

$$\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k \leq t \leq \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k.$$

г) Геометрическое решение заданного неравенства — дуга MK (рис. 47, б) с началом в точке $M(\pi + \arcsin 0,6)$ и с концом в точке $K(2\pi - \arcsin 0,6)$. Эта геометрическая модель позволяет перейти к аналитической записи решения заданного неравенства:

$$\pi + \arcsin 0,6 + 2\pi k < t < 2\pi - \arcsin 0,6 + 2\pi k.$$

16.17. Решить неравенство:

а) $5 \sin^2 t > 11 \sin t + 12$; б) $5 \sin^2 t \leq 11 \sin t + 12$.

Решение. а) Решив уравнение $5 \sin^2 t - 11 \sin t - 12 = 0$, получим $\sin t = 3$ или $\sin t = -\frac{4}{5}$. Заданное неравенство сводится к совокупности двух неравенств: $\sin t > 3$; $\sin t < -\frac{4}{5}$. Первое неравенство не имеет решений, а из второго получаем (рис. 48, а):

$$\pi + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k < t < 2\pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k.$$

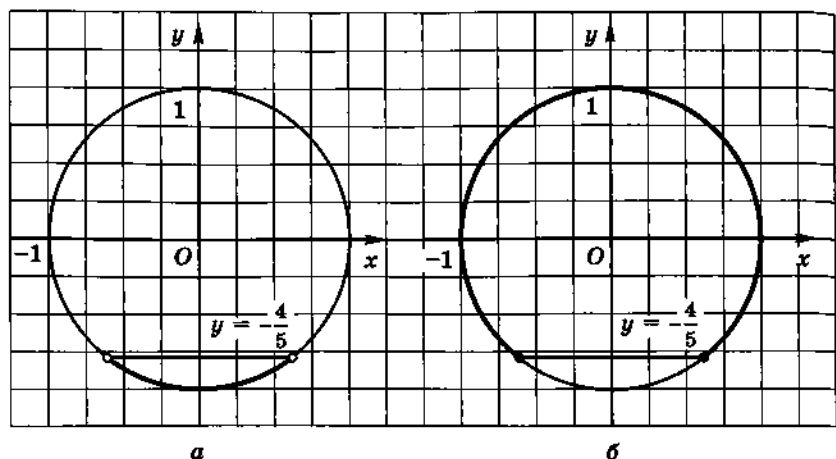


Рис. 48

В пункте б) получаем: $-\frac{4}{5} < \sin t < 3$. Ясно, что достаточно ограничиться левой частью этого двойного неравенства. Получаем (рис. 48, б):

$$-\arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k \leq t \leq \pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k.$$

16.18. Решить неравенство:

а) $6 \cos^2 t + \sin t > 4$;

б) $6 \cos^2 t + \sin t \leq 4$.

Решение. а) $6(1 - \sin^2 t) + \sin t > 4$; $6 \sin^2 t - \sin t - 2 < 0$;

$$-\frac{1}{2} < \sin t < \frac{2}{3}.$$

На рисунке 49, а представлена геометрическая модель решения последнего двойного неравенства — дуги KM и PT . Осталось только составить аналитические записи этих дуг:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k; \quad \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k.$$

б) Здесь мы приходим к совокупности двух неравенств: $\sin t \leq -\frac{1}{2}$; $\sin t \geq \frac{2}{3}$. Получаем (рис. 49, б):

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq t \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi k; \quad \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k \leq t \leq \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k.$$

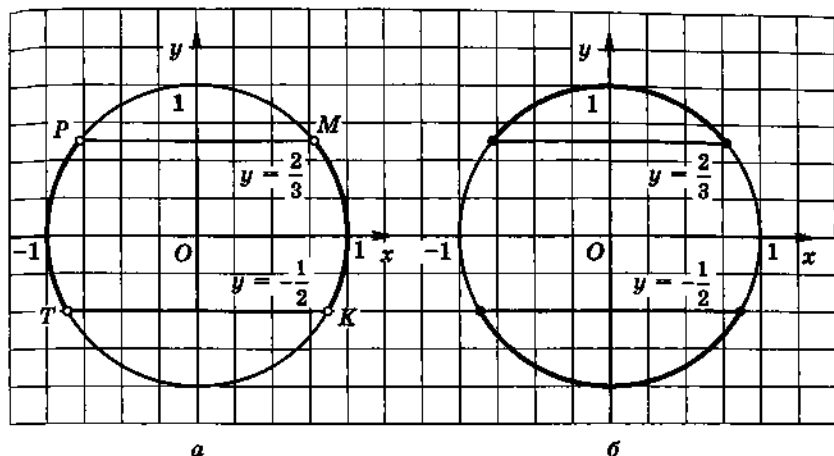


Рис. 49

16.19. Вычислить: б) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6)$; г) $\operatorname{ctg}(\arcsin(-0,8))$.

Решение. б) Пусть $\arcsin 0,6 = t$. Тогда $\sin t = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$; надо вычислить $\operatorname{tg} t$.

Имеем: $\cos t = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$.

г) Пусть $\arcsin(-0,8) = t$. Тогда $\sin t = -\frac{4}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < t < 0$; надо вычислить $\operatorname{ctg} t$.

Имеем: $\cos t = \frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4}$.

17.10. Построить график функции:

а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

б) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$;

в) $y = \operatorname{arccotg} x + \operatorname{arccotg}(-x)$;

г) $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{x} + \operatorname{arccotg}(-\sqrt{x})$.

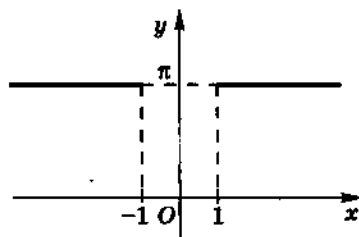


Рис. 50

Решение. Во всех случаях основой графика служит прямая $y = \pi$. В задании а) речь идет о построении графика функции $y = \pi$, где $-1 \leq x \leq 1$. В задании б) речь идет о построении графика функции $y = \pi$, область определения которой задается условием $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$, т.е. $x \leq -1$; $x \geq 1$ (рис. 50). В задании в) речь идет о построении графика функции $y = \pi$, $x \in \mathbb{R}$, а в задании г) — о построении графика функции $y = \pi$, где $x \geq 0$.

18.17. б) Найти корни уравнения $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[1; 7]$.

Решение. $3x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$.

Осталось из найденного множества чисел отобрать те, которые принадлежат заданному промежутку. Проще всего это сделать «перебором по параметру». Ясно, что при отрицательных значениях параметра получатся отрицательные значения x , которые в данном случае нас не интересуют. Рассмотрим последовательно неотрицательные значения параметра.

При $n = 0$ получаем: $x = \pm \frac{\pi}{4}$; оба эти числа не принадлежат отрезку $[1; 7]$.

При $n = 1$ получаем: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$.

Оба эти значения больше 1 и меньше 7, они нас устраивают.

При $n = 2$ получаем: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$.

Оба эти значения больше 1 и меньше 7, они нас устраивают.

При $n = 3$ получаем: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Второе значение явно принадлежит отрезку $[1; 7]$, а вот с первым надо разобраться: $\frac{9\pi}{4} > \frac{9 \cdot 3,14}{4} = \frac{28,26}{4} > 7$.

Значит, $\frac{9\pi}{4}$ мы включать в ответ не должны.

При $n = 4$ даже меньшее из получаемых двух значений уже больше 7: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{3} = \frac{29\pi}{12} > \frac{29 \cdot 3}{12} = \frac{29}{4} > 7$. Это значит, что все корни заданного уравнения, которые получаются при значениях параметра $\pi \geq 4$, не попадают в заданный отрезок, они располагаются на числовой прямой правее него.

Ответ: $\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}$.

18.23. а) Решить уравнение $\sin^2 x - \frac{12 - \sqrt{2}}{2} \sin x - 3\sqrt{2} = 0$.

Решение. Введем новую переменную $y = \sin x$; получим квадратное уравнение $2y^2 - (12 - \sqrt{2})y - 6\sqrt{2} = 0$. Решим это уравнение:

$$y = \frac{(12 - \sqrt{2}) \pm \sqrt{(12 - \sqrt{2})^2 + 48\sqrt{2}}}{4} = \frac{(12 - \sqrt{2}) \pm \sqrt{(12 + \sqrt{2})^2}}{4} =$$

$$= \frac{(12 - \sqrt{2}) \pm (12 + \sqrt{2})}{4},$$

$$y_1 = 6, y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое значение нас не устраивает, а второе приводит к простому уравнению $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Как видите, уравнение решено по стандартным алгоритмам. Если же с самого начала проявить немного наблюдательности, то решение будет и проще (технически), и красивее. Чуть-чуть изменим запись данного уравнения: $\sin^2 x - \left(6 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x - 3\sqrt{2} = 0$. Заметим, что числа 6 и $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ дают в произведении как раз свободный член уравнения. Значит, именно эти числа и являются корнями квадратного уравнения, а потому данное уравнение сводится к совокупности двух уравнений: $\sin x = 6$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.33. Решить уравнение:

а) $\sqrt{16 - x^2} \cdot \sin x = 0$;

б) $\sqrt{7x - x^2} \cdot (2 \cos x - 1) = 0$.

Решение. а) Фактически речь идет об отыскании корней уравнения $\sin x = 0$ на отрезке $[-4; 4]$, служащем решением неравенства $16 - x^2 \geq 0$. Из серии $x = \pi n$ этому отрезку принадлежат три значения: $-\pi, 0, \pi$. Кроме того, в ответ следует включить корни уравнения $16 - x^2 = 0$, т.е. значения 4 и -4 .

б) Решением неравенства $7x - x^2 \geq 0$ служит отрезок $[0; 7]$. Из уравнения $2 \cos x - 1 = 0$ находим $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Если $n = 0$, то $x = \pm \frac{\pi}{3}$; указанному отрезку принадлежит лишь значение $\frac{\pi}{3}$. Если $n = 1$, то $x = \frac{7\pi}{3}$ или $\frac{5\pi}{3}$; отрезку $[0; 7]$ принадлежит только значение $\frac{5\pi}{3}$. При остальных значениях параметра n получаются корни тригонометрического уравнения, лежащие вне указанного отрезка.

Ответ: а) $-4, -\pi, 0, \pi, 4$; б) $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 7$.

18.34. Решить уравнение:

а) $(\sqrt{2} \cos x - 1)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0;$

б) $(2 \sin x - \sqrt{3})\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0.$

Решение. а) Из уравнения $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$ находим: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Из неравенства $4x^2 - 7x + 3 \geq 0$ получим: $x \leq \frac{3}{4}$, $x \geq 1$. Все найденные решения тригонометрического уравнения удовлетворяют этим условиям, кроме $\frac{\pi}{4}$. Ответ можно записать так: $1, \frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}$, и серия $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

б) Из уравнения $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ находим две серии решений: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. Решив неравенство $3x^2 - 7x + 4 \geq 0$, получим: $x \leq 1$, $x \geq \frac{4}{3}$. Все найденные решения тригонометрического уравнения удовлетворяют этим условиям, кроме $\frac{\pi}{3}$. Ответ можно записать так: $1, \frac{4}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

18.35. Найти область значений функции:

а) $y = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1};$

б) $y = \sin 2x + \sqrt{\sin^2 4x - 1}.$

Решение. а) Имеем:

$$y = \cos 3x + \sqrt{-\sin^2 3x}.$$

Подкоренное выражение имеет смысл лишь при условии, что $\sin 3x = 0$, т.е. $3x = \pi n$. Но тогда $\cos 3x = \pm 1$. Таким образом, $E(f) = \{-1, 1\}$.

б) Имеем:

$$y = \sin 2x + \sqrt{-\cos^2 4x}.$$

Подкоренное выражение имеет смысл лишь при условии, что $\cos 4x = 0$, т.е. $4x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Но тогда $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $E(f) = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

19.26. 6) Решить неравенство $\cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x < -\frac{1}{3}$.

Решение. Имеем: $\cos 7x < -\frac{1}{3}$. Положим $7x = t$ и рассмотрим неравенство $\cos t < -\frac{1}{3}$. С помощью числовой окружности (рис. 51) получаем:

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi < 7x < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi;$$

$$\frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2\pi}{7} < x < \frac{2\pi}{7} - \frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2\pi}{7}.$$

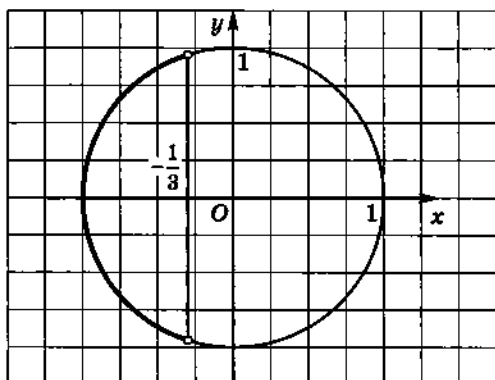


Рис. 51

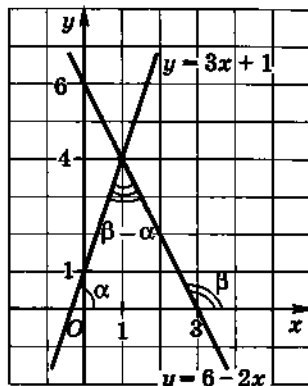


Рис. 52

20.15. Доказать, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом 45° .

Решение. Построим графики заданных линейных функций (рис. 52). Прямая $y = 3x + 1$ образует с осью x угол α , причем $\operatorname{tg} \alpha = 3$; прямая $y = 6 - 2x$ образует с осью x угол β , причем $\operatorname{tg} \beta = -2$. Искомый угол равен $\beta - \alpha$.

Имеем:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} = 1.$$

Итак, $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = 1$, значит, $\beta - \alpha = 45^\circ$.

20.16. Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Чему равен угол между диагональю AC и отрезком BK ?

Решение. Примем половину стороны квадрата за 1. Тогда искомый угол COK (рис. 53) равен $135^\circ - \alpha$; здесь $\alpha = \angle BKC$ и $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Имеем:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (135^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 135^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot 2} = 3.$$

Итак, искомый угол равен $\operatorname{arctg} 3$.

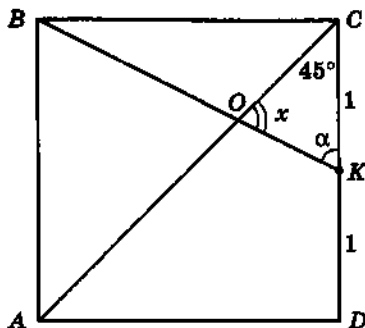


Рис. 53

21.12 а) Дано: $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$. Вычислить $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ctg} x$.

Решение. В подобных заданиях наиболее удобной является функция косинус, поскольку она связана с другими функциями как того же аргумента, так и аргумента вдвое большего или меньшего. Поэтому начнем с отыскания $\cos 2x$: $\cos^2 2x = -1 - \sin^2 2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Из условия следует, что $\pi < 2x < \frac{3\pi}{2}$, а в этом промежутке косинус отрицателен. Значит, из уравнения $\cos^2 2x = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos 2x = -\frac{4}{5}$.

Далее $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, откуда следует, что $\cos^2 x = \frac{1}{10}$. По условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, а в этом промежутке $\cos x < 0$. Значит, из уравнения $\cos^2 x = \frac{1}{10}$ находим, что $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Вычислим $\sin x$; имеем: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. По условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, а в этом промежутке $\sin x > 0$. Значит, из уравнения $\sin^2 x = \frac{9}{10}$ находим, что $\sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Теперь тангенс и котангенс находятся без всякого труда:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -3; \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{3}.$$

21.36. б) Найти корни уравнения $\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Решение. Воспользовавшись формулой косинуса двойного аргумента, преобразуем данное уравнение к виду $\cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; поскольку $\cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 6x$, получаем: $\sin 6x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $6x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{6}$.

Осталось из найденного множества чисел отобрать те, которые принадлежат заданному промежутку. Выше, в примере 18.17, мы воспользовались в подобном случае методом перебора по параметру. Поступим так же и теперь, но в несколько измененном виде (может быть, такая методика вам понравится больше). Рассмотрим неравенство $\frac{3\pi}{4} \leq (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{6} \leq \pi$, выясним, при каких значениях параметра оно выполняется; эти значения параметра и позволят нам из найденного множества чисел выбрать те, которые нам нужны.

Преобразуем двойное неравенство: умножим обе его части на 36 и разделим на π :

$$27 \leq (-1)^n \cdot 2 + 6n \leq 36.$$

Не так уж трудно сообразить, что среди всех чисел вида $(-1)^n \cdot 2 + 6n$ между 27 и 36 заключено только одно — то, которое получается при $n = 5$. Это значит, что из всего множества чисел вида $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{6}$ мы должны взять лишь одно, подставив 5 вместо n . Получим: $x = (-1)^5 \frac{\pi}{18} + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{18} = \frac{7\pi}{9}$.

21.37. Найти корни уравнения $2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{\pi}{9} = 1$, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

Решение. Имеем: $(1 + \cos x) - \cos \frac{\pi}{9} = 1$; $\cos x = \cos \frac{\pi}{9}$;
 $x = \pm \frac{\pi}{9} + 2\pi n$.

Для отбора интересующих нас корней применим тот же прием, что использовали в предыдущем примере:

$$-2\pi \leq \pm \frac{\pi}{9} + 2\pi n \leq 2\pi; \quad -18 \leq \pm 1 + 18n \leq 18.$$

Среди всех чисел вида $18n \pm 1$ между -18 и 18 заключены числа ± 1 (при $n = 0$), $17 = 18 \cdot 1 - 1$ (при $n = 1$) и $-17 = 18 \cdot (-1) + 1$ (при $n = -1$). Таким образом, из серии $x = \pm \frac{\pi}{9} + 2\pi n$ мы выбираем 4 значения: $\pm \frac{\pi}{9}, \pm \frac{17\pi}{9}$.

21.38. а) Сколько корней имеет уравнение $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin 2x$ на отрезке $\left[\frac{20\pi}{9}; \frac{28\pi}{9}\right]$?

Решение. Пример носит явно «тестовый» характер: сами корни находить не нужно. Воспользовавшись формулой $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$, преобразуем уравнение к виду $\sin 2x = 0$, откуда находим: $x = \frac{\pi n}{2}$. Далее имеем:

$$\frac{20\pi}{9} \leq \frac{\pi n}{2} \leq \frac{28\pi}{9}; \quad 40 \leq 9n \leq 56.$$

Последнему двойному неравенству удовлетворяют лишь два целых числа: 5 и 6. Значит, заданное уравнение на заданном промежутке имеет всего два корня.

22.22. а) Найти корни уравнения $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$, принадлежащие интервалу $(0; 2,5)$.

Решение.

$$2 \cos 7x \cos x = 2 \cos 11x \cos x;$$

$$\cos x (\cos 7x - \cos 11x) = 0;$$

$$2 \cos x \sin 9x \sin 2x = 0.$$

Чтобы не делать лишней работы, полезно учесть, что из $\cos x = 0$ следует $\sin 2x = 0$, а потому вместо совокупности трех уравнений достаточно рассмотреть совокупность двух уравнений: $\sin 9x = 0$; $\sin 2x = 0$. Значит, либо $x = \frac{\pi n}{9}$, либо $x = \frac{\pi n}{2}$.

Проверим, какие корни из первой серии принадлежат интервалу $(0; 2,5)$:

$$0 < \frac{\pi n}{9} < 2,5; \quad 0 < \pi n < 22,5.$$

Ясно, что последнему двойному неравенству удовлетворяют значения $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и даже 7 , поскольку $7\pi < 7 \cdot 3,15 = 22,05 < 22,5$; а вот число 8 и все остальные целые числа неравенству не удовлетворяют. Эти 7 значений параметра дают 7 корней из первой серии: $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{9}$.

Проверим, какие корни из второй серии принадлежат интервалу $(0; 2,5)$:

$$0 < \frac{\pi n}{2} < 2,5; 0 < \pi n < 5.$$

Ясно, что последнему двойному неравенству удовлетворяет лишь $n = 1$, при котором из второй серии мы получаем $x = \frac{\pi}{2}$.
Таковы 8 корней, удовлетворяющих условию задачи.

23.8. 6) Вычислить $\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Решение. Воспользуемся упомянутыми выше «тупыми» законами тригонометрии: увидишь квадрат — понижай степень, увидишь произведение — делай сумму; получим:

$$\begin{aligned}\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ &= \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} + \frac{\cos 120^\circ + \cos 20^\circ}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos 120^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

23.9. Вычислить: а) $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$; б) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4 \cos 100^\circ$.

$$\begin{aligned}\text{Решение. а) } \frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ &= \frac{1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \\ &= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(0,5 - \cos 80^\circ)}{2 \sin 10^\circ} = \frac{2 \cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{б) } \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4 \cos 100^\circ &= \frac{\sqrt{3} + 4 \sin 40^\circ \cos 100^\circ}{\sin 40^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + 2(\sin 140^\circ - \sin 60^\circ)}{\sin 40^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 2 \sin 140^\circ - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 140^\circ}{\sin 40^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin (180^\circ - 40^\circ)}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 2.\end{aligned}$$

23.13. Доказать тождество

$$\cos^2 (45^\circ - \alpha) - \cos^2 (60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin (75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$$

Решение. Это — классический пример на использование указанных выше (в комментариях к главе 4) трех законов. Применяя к первому и второму слагаемым левой части формулу понижения степени (*третий закон*), а к третьему слагаемому — формулу преобразования произведения в сумму (*второй закон*), получим:

$$\frac{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha) - (1 + \cos(120^\circ + 2\alpha)) - (\sin(150^\circ - 2\alpha) - \sin 2\alpha)}{2} = \frac{2\sin 2\alpha - (\cos(120^\circ + 2\alpha) + \sin(150^\circ - 2\alpha))}{2}.$$

Если теперь обозначим $120^\circ + 2\alpha$ буквой t и отметим, что $150^\circ - 2\alpha = 270^\circ - t$, то в скобках получим выражение $\cos t + \sin(270^\circ - t)$, т.е. $\cos t - \cos t$. В итоге имеем $\sin 2\alpha$.

Глава 5

28.46. а) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = 4x^2 - |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x , образуют между собой угол 60° ?

б) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^2 + |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x , образуют между собой угол 45° ?

Решение. В этой задаче составлять уравнения касательных не надо, достаточно использовать (что более важно на данном этапе) геометрический смысл производной, т.е. угловые коэффициенты касательных.

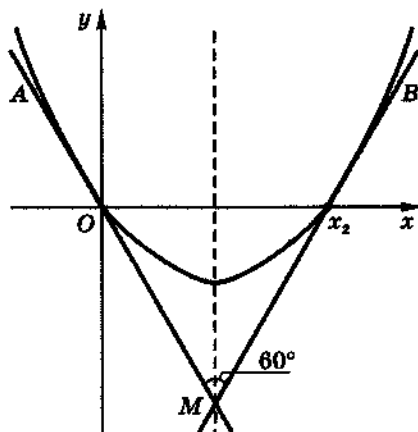


Рис. 54

а) Графиком функции является парабола с ветвями вверх, пересекающая ось x в двух точках (случай $a = 0$ нас явно не устраивает): $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{|a|}{4}$; впрочем, значимо лишь то, что $x_2 > 0$ (рис. 54). Касательные AM и BM пересекаются под углом 60° в точке M , лежащей на оси параболы, причем возможны два случая: либо $\angle AMB = 60^\circ$, либо смежный угол равен 60° .

В первом случае угол между касательной AO и осью x равен 120° , следовательно, угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg} 120^\circ$, т.е. он равен $-\sqrt{3}$. Далее имеем: $y' = 8x - |a|$, $y'(0) = -|a|$. Таким образом получаем, что $-\sqrt{3} = -|a|$, т.е. $a = \pm\sqrt{3}$.

Во втором случае $\angle AMB = 120^\circ$, поэтому угол между касательной AO и осью x равен 150° . Значит, угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg} 150^\circ$, т.е. он равен $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом получаем, что $-\frac{\sqrt{3}}{3} = -|a|$, т.е. $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Графиком функции является парабола с ветвями вверх, пересекающая ось x в двух точках: $x_1 = 0$ и $x_2 < 0$ (рис. 55). Касательные AM и BM пересекаются под углом 45° в точке M , лежащей на оси параболы, причем возможны два случая: либо $\angle AMB = 45^\circ$, либо смежный угол равен 45° .

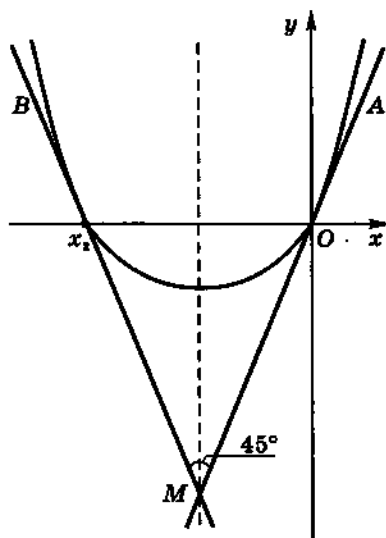


Рис. 55

В первом случае угол между касательной AM и осью x равен $67,5^\circ$, следовательно, угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg} 67,5^\circ$. Выполним необходимые вычисления:

$$\operatorname{tg} 67,5^\circ = \frac{\sin 67,5^\circ}{\cos 67,5^\circ} = \frac{2\sin 67,5^\circ \cos 67,5^\circ}{2\cos 67,5^\circ \cos 67,5^\circ} = \frac{\sin 135^\circ}{1 + \cos 135^\circ} = \sqrt{2} + 1.$$

Далее имеем: $y' = 2x + |a|$, $y'(0) = |a|$. Таким образом получаем, что $\sqrt{2} + 1 = |a|$, т.е. $a = \pm(\sqrt{2} + 1)$.

Во втором случае $\angle AMB = 135^\circ$, поэтому угол между касательной AM и осью x равен $22,5^\circ$. Значит, угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg} 22,5^\circ$, т.е. он равен $\sqrt{2} - 1$. Таким образом получаем, что $\sqrt{2} - 1 = |a|$, т.е. $a = \pm(\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\pm(\sqrt{2} + 1), \pm(\sqrt{2} - 1)$ (короче это можно записать так: $\pm\sqrt{2} \pm 1$).

29.25. а) Через точку $B(-2; 3)$ провести касательную к графику функции

$$y = \sqrt{3 - x}.$$

Решение. Используя общий вид уравнения касательной $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x = a$:

$$y = \sqrt{3 - a} - \frac{1}{2\sqrt{3 - a}}(x - a). \quad (1)$$

Подставив в это уравнение значения $x = -2$, $y = 3$, получим иррациональное уравнение

$$3 = \sqrt{3 - a} - \frac{1}{2\sqrt{3 - a}}(-2 - a),$$

решив которое, находим: $a_1 = 2$, $a_2 = -22$. Если $a = 2$, то уравнение (1) примет вид $y = -0,5x + 2$; если $a = -22$, то уравнение (1) примет вид $y = -0,1x + 2,8$.

29.26. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.

Решение. Речь идет о вычислении площади треугольника OAB на рисунке 56; AB — касательная к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, a — абсцисса точки касания.

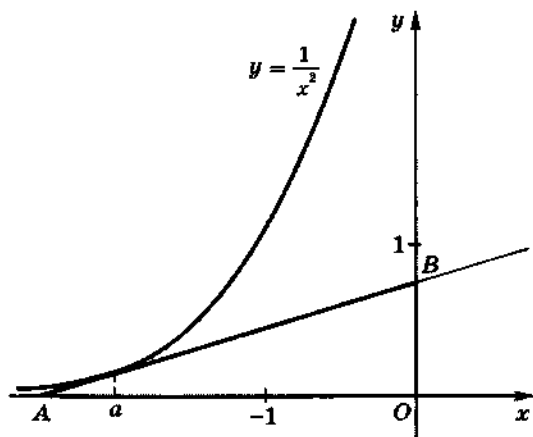


Рис. 56

Составим уравнение касательной в общем виде:

$$y = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3}(x - a), \text{ т. е.}$$

$$y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}. \quad (2)$$

Найдем точки пересечения этой прямой с осями координат.

Если $x = 0$, то $y = \frac{3}{a^2}$. Следовательно, точка B имеет координаты $B\left(0; \frac{3}{a^2}\right)$, поэтому $OB = \frac{3}{a^2}$.

Если $y = 0$, то $x = \frac{3a}{2}$. Значит, точка A имеет координаты $A\left(\frac{3a}{2}; 0\right)$, поэтому $AO = -\frac{3a}{2}$ (здесь речь идет о стороне треугольника, а не об абсциссе точки A).

По условию площадь S треугольника AOB равна $\frac{9}{8}$, следовательно,

$$\frac{1}{2}AO \cdot OB = \frac{9}{8};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-3a}{2} \cdot \frac{3}{a^2} = \frac{9}{8};$$

$$a = -2.$$

Подставив это значение в уравнение (2), получим уравнение искомой касательной:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

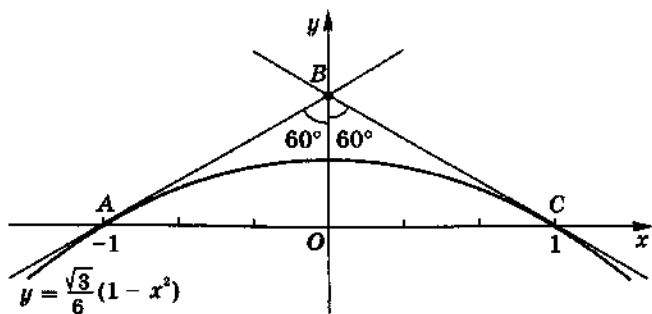


Рис. 57

Замечание. К этому времени учащиеся еще не знакомы с формулой дифференцирования степенной функции. Поэтому производную функции $y = \frac{1}{x^2}$ приходится искать по правилу дифференцирования частного, а не по готовой формуле $y' = -2x^{-3}$.

29.27. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом 120° в точке, лежащей на оси y (рис. 57).

Решение. Касательная BC составляет с осью абсцисс угол 150° ; $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ — это угловой коэффициент касательной BC . Угловой коэффициент касательной AB равен соответственно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Имеем $y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$. Из уравнения $-\frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ находим $x = 1$ — это абсцисса точки касания прямой BC и параболы. В точке $x = 1$ заданная функция принимает значение 0; отсюда следует, что точка касания лежит на оси абсцисс, поэтому точкой касания является точка C (именно так и сделан чертеж).

Теперь уже нетрудно составить уравнения касательных. Для BC имеем $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$; для AB имеем $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$.

31.11. Построить график функции: а) $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$; б) $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

Решение. а) Сразу отмечаем, что $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и что функция не является ни четной, ни нечетной. Значит, для построения ее графика важно знать две вещи: точки экстремума и асимптоты. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 2} = 0$, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции. Далее

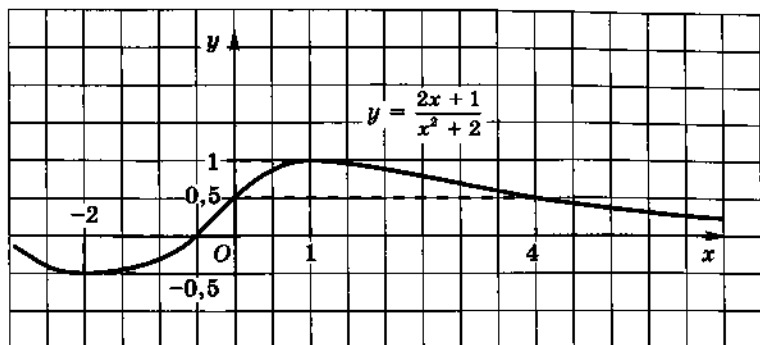


Рис. 58

$$y' = \left(\frac{2x+1}{x^2+2} \right)' = \frac{2(x^2+2) - 2x(2x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2};$$

$y' = 0$ при $x = 1$ или при $x = -2$. Первая точка — точка максимума, причем $y_{\max} = 1$; вторая точка — точка минимума, причем $y_{\min} = -0,5$. Еще неплохо бы найти точки пересечения графика с осями координат: в данном случае это точки $(0; 0,5)$ и $(-0,5; 0)$. Полезна и контрольная точка $(4; 0,5)$. График функции представлен на рисунке 58 (в недорисованной части — асимптотическое приближение графика к оси абсцисс при $x \rightarrow -\infty$).

б) График имеет примерно такой же вид. Здесь две точки экстремума: $x = 5$, $y_{\max} = 0,1$; $x = -1$, $y_{\min} = -0,5$. Изменились, естественно, и точки пересечения с осями координат: $(2; 0)$ и $(0; -\frac{2}{5})$. График функции представлен на рисунке 59.

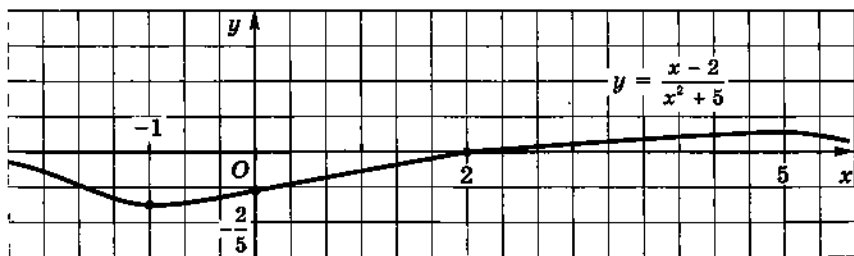


Рис. 59

31.12. а) Построить график функции $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$.

Решение. Сразу отмечаем, что $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ и что функция является четной. Значит, график симметричен

относительно оси ординат, имеет вертикальные асимптоты $x = -2$, $x = 2$ и для построения графика важно знать еще три вещи: промежутки знакопостоянства, точки экстремума и горизонтальную асимптоту. Знаки функции $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ схематически представлены на рисунке 60.

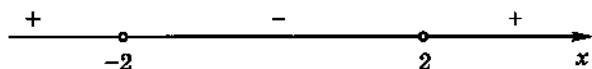


Рис. 60

Учитывая найденные вертикальные асимптоты, составляем первое представление об искомом графике — см. рисунок 61 (в заштрихованных областях ветвей графика нет).

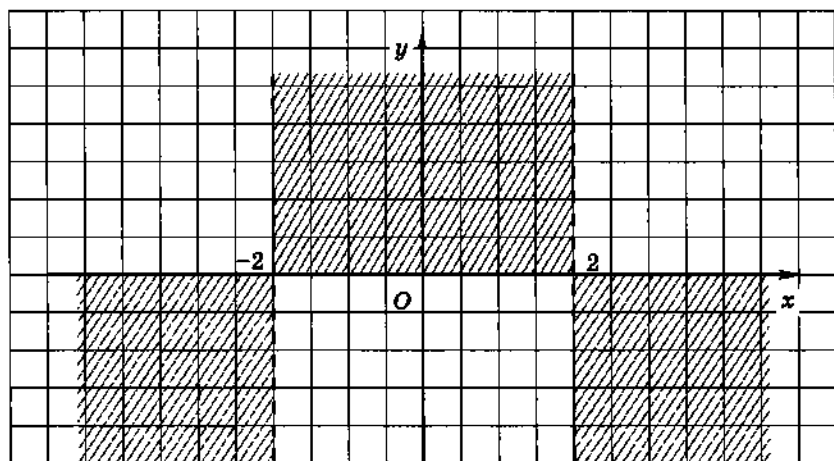


Рис. 61

Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 1$, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика функции. Далее $y' = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$, значит, у функции только одна точка экстремума: $x = 0$, $y_{\max} = -1$. Для большей точности полезно взять контрольную точку (3; 2,6). График функции представлен на рисунке 62.

В следующем примере мы несколько изменим формулировку по сравнению с тем, что дано в задачнике; это позволит на одном примере охватить практически все идеи, заложенные в № 31.13—31.15.

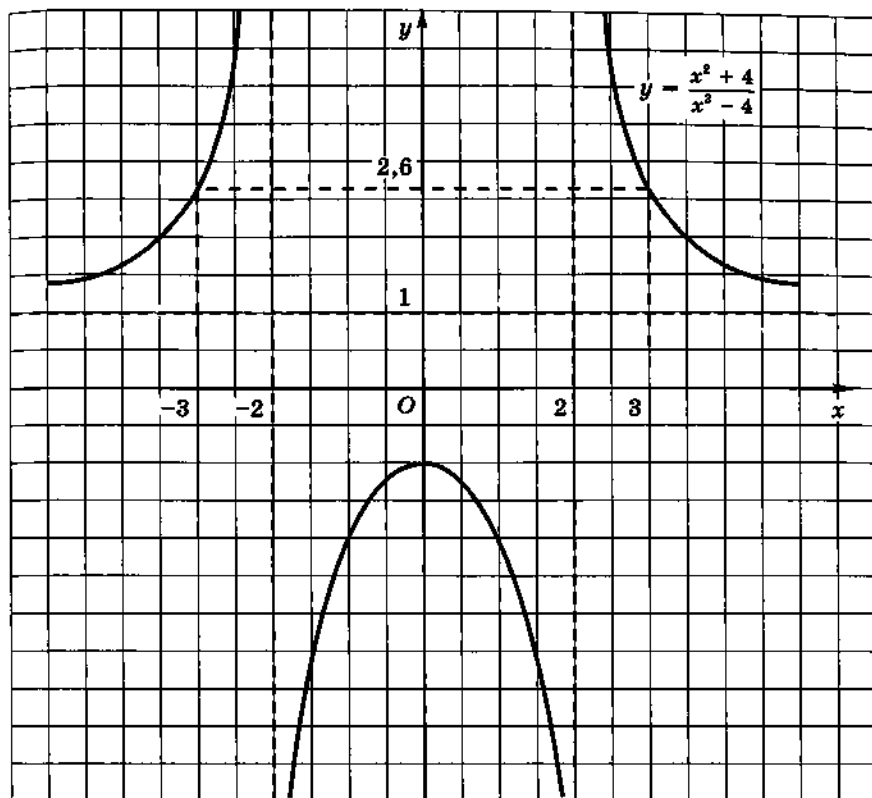


Рис. 62

31.14. Построить график функции $y = -x^4 + 2x^2 + 8$ и с его помощью сделать выводы о количестве корней уравнения с параметром $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$.

Решение. Функция четная и имеет три точки экстремума: $(-1; 9)$, $(0; 8)$ и $(1; 9)$, график изображен на рисунке 63. Проводя (явно или мысленно) различные горизонтальные прямые $y = a$, приходим к следующим выводам: если $a > 9$, то уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней; если $a = 9$ или $a < 8$, то уравнение имеет два корня; если $a = 8$, то уравнение имеет три корня; если $8 < a < 9$, то уравнение имеет четыре корня.

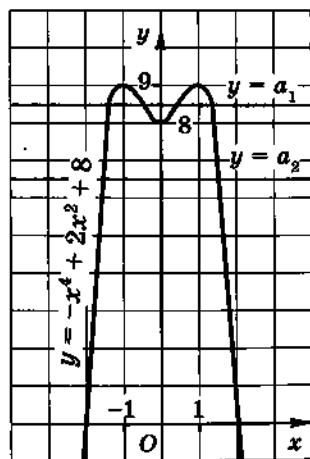


Рис. 63

32.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0; 4]$;

б) $y = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1; 3]$.

Решение. а) Применим алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. Сначала надо найти производную заданной функции, затем критические и стационарные точки, принадлежащие заданному отрезку $[0; 4]$. После этого нужно вычислить значения функции на концах отрезка и в выделенных стационарных и критических точках и среди них найти наибольшее и наименьшее значения.

Если $x < 1$, то $|1 - x| = 1 - x$ и, значит,

$$x^2 - 4x + 5 + |1 - x| = x^2 - 4x + 5 + 1 - x = x^2 - 5x + 6.$$

Если $x \geq 1$, то $|1 - x| = x - 1$ и, следовательно,

$$x^2 - 4x + 5 + |1 - x| = x^2 - 4x + 5 + x - 1 = x^2 - 3x + 4.$$

Таким образом, речь идет о кусочной функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{если } 0 \leq x < 1; \\ x^2 - 3x + 4, & \text{если } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Имеем:

$$y' = \begin{cases} 2x - 5, & \text{если } 0 < x < 1; \\ 2x - 3, & \text{если } 1 < x < 4. \end{cases}$$

В точке «стыка» $x = 1$ производная не существует, значит, $x = 1$ — критическая точка.

Найдем стационарные точки. Из уравнения $2x - 5 = 0$ находим $x = 2,5$, но это значение не удовлетворяет условию $0 < x < 1$. Из уравнения $2x - 3 = 0$ находим $x = 1,5$; это значение удовлетворяет условию $1 < x < 4$. Следовательно, $x = 1,5$ — единственная стационарная точка функции на отрезке $[0; 4]$.

Составим таблицу значений функции:

| x | 0 | 1 | 1,5 | 4 |
|-----|---|---|------|---|
| y | 6 | 2 | 1,75 | 8 |

В итоге имеем: $y_{\text{наим}} = 1,75$; $y_{\text{наиб}} = 8$.

б) Рассуждая как в задании а), получаем:

$$y = \begin{cases} -x^3 - 3x + 1, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ x^3 - 3x - 1, & \text{если } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Имеем:

$$y' = \begin{cases} -3x^2 - 3, & \text{если } -1 < x < 1; \\ 3x^2 - 3, & \text{если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

В точке «стыка» $x = 1$ производная не существует, значит, $x = 1$ — критическая точка.

Найдем стационарные точки. Уравнение $-3x^2 - 3 = 0$ корней не имеет. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ находим $x = \pm 1$; эти значения не удовлетворяют условию $1 < x < 3$. Следовательно, функция не имеет стационарных точек на отрезке $[-1; 3]$.

Составим таблицу значений функции:

| | | | |
|-----|------|------|------|
| x | -1 | 1 | 3 |
| y | 5 | -3 | 17 |

В итоге получаем $y_{\text{наим}} = -3$; $y_{\text{наиб}} = 17$.

32.17. а) Найти область значений функции $y = 2x - \sqrt{16x - 4}$,
 $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{17}{4} \right]$.

Решение. Заданная функция непрерывна на заданном отрезке, значит, область значений функции — отрезок от наименьшего до наибольшего значения функции. Таким образом, используя обычный алгоритм, надо найти наименьшее и наибольшее значения функции.

Имеем: $y' = 2 - \frac{16}{2\sqrt{16x-4}} = \frac{2\sqrt{16x-4} - 8}{\sqrt{16x-4}}$. Критических точек внутри заданного отрезка нет, а стационарную точку найдем из уравнения $\sqrt{16x-4} = 4$; получим $x = \frac{5}{4}$. Осталось вычислить значения функции в найденной стационарной точке и на концах заданного отрезка: если $x = \frac{1}{4}$, то $y = \frac{1}{2}$; если $x = \frac{5}{4}$, то $y = -\frac{3}{2}$; если $x = \frac{17}{4}$, то $y = \frac{1}{2}$. Таким образом, $E(f) = [-1,5; 0,5]$.

32.18. Найти область значений функции: а) $y = x\sqrt{x+2}$;
 б) $y = x\sqrt{1-2x}$.

Решение. а) Область определения функции — луч $[-2; +\infty)$. Найдем производную $y' = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$. Критических точек внутри луча $[-2; +\infty)$ нет, а стационарную точку найдем из уравнения $3x+4=0$; получим $x = -\frac{4}{3}$. Это единственная точка экстремума, причем точка минимума, поскольку при переходе через эту точку знаки производной меняются с «-» на «+». Тогда (см. теорему из §32 учебника)

в этой точке функция достигает своего наименьшего значения, вычислим его: $y = -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3} + 2} = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$. А наибольшего значения у функции нет, поскольку она явно неограниченна сверху. Значит, $E(f) = \left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}; +\infty\right)$.

б) Область определения функции — луч $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. Найдем производную $y' = \sqrt{1-2x} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-2x-x}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}}$. Критических точек внутри луча $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ нет, а стационарную точку найдем из уравнения $1-3x=0$; получим $x = \frac{1}{3}$. Это единственная точка экстремума, причем точка максимума, поскольку при переходе через эту точку знаки производной меняются с «+» на «-». По теореме из §32 учебника в этой точке функция достигает своего наибольшего значения, вычислим его: $y = \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$. А наименьшего значения у функции нет, поскольку она явно неограниченна снизу. Значит, $E(f) = \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$.

32.19. Найти область значений функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + \sqrt{16 - x^4} + \left|\sqrt{16 - x^4} - 5\right|.$$

Решение. Сначала найдем область определения функции. Из неравенства $16 - x^4 \geq 0$ получаем $-2 \leq x \leq 2$. Заметим, что $\sqrt{16 - x^4} \leq 4$, а потому $\sqrt{16 - x^4} - 5 < 0$; значит, $\left|\sqrt{16 - x^4} - 5\right| = 5 - \sqrt{16 - x^4}$, и заданную функцию можно преобразовать к виду $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Речь идет об отыскании множества значений этой функции на отрезке $[-2; 2]$. Обычным образом находим $y_{\min} = -17$, $y_{\max} = 10$. Значит, $E(f) = [-17; 10]$.

32.29. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах AD и CD берутся соответственно точки K и M так, что четырехугольник $KPEM$ — трапеция. Чему равна наибольшая площадь такой трапеции?

Решение. Первый этап. Составление математической модели.

На рисунке 64 представлена геометрическая иллюстрация: квадрат $ABCD$, в который вписана трапеция $KPEM$ согласно условиям задачи.

2) В качестве независимой переменной x есть смысл принять длину отрезка KD . Через x сравнительно нетрудно выразить все элементы трапеции, которые нужны для отыскания ее площади: основания KM и PE и высоту HF . Отметим реальные границы изменения x : поскольку точка K может занять на AD любое положение (кроме, естественно, D), заключаем, что $0 < x \leq 8$.

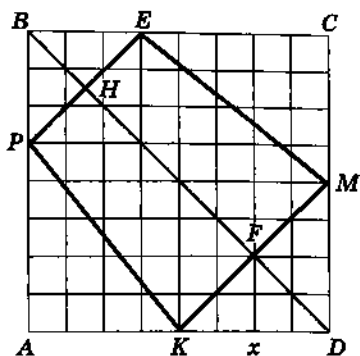


Рис. 64

3) Выразим S через x . Из треугольника BEF следует, что $FE = 3\sqrt{2}$ см, а высота $BH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. Из треугольника KMD следует, что $KM = x\sqrt{2}$ см, а высота $DF = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ см.

Теперь можно вычислить высоту трапеции:

$$HF = 8\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(13 - x) \text{ см.}$$

Далее,

$$S = \frac{KM + PE}{2} \cdot HF = \frac{x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(13 - x) = \frac{1}{2}(x + 3)(13 - x) \text{ cm}^2.$$

Итак, речь идет об отыскании наибольшего значения функции $S = 0,5(x + 3)(13 - x)$ или, что то же самое, $S = 0,5(10x + 39 - x^2)$ на полуинтервале $(0; 8]$. Это — математическая модель задачи.

Второй этап. Работа с составленной моделью.

Имеем $S' = 0,5(10 - 2x) = 5 - x$; $S' = 0$ при $x = 5$ — это единственная точка экстремума внутри заданного промежутка, причем точка максимума. Значит, именно в этой точке функция достигает своего наибольшего значения: $S = 0,5(10 \cdot 5 + 39 - 5^2) = 32 \text{ см}^2$.

Конечно, полезно обратить внимание учащихся на то, что в данном примере можно было на втором этапе обойтись и без производной, поскольку полученный квадратный трехчлен можно было преобразовать элементарными средствами:

$$S = 0,5(10x + 39 - x^2) = 0,5(64 - 25 + 10x - x^2) = 0,5(64 - (x - 5)^2).$$

Очевидно, что наибольшего значения 32 трехчлен достигает при $x = 5$.

32.30. На графике функции $y = x^2$ найти точку M , ближайшую к точке $A(0; 1,5)$ (рис. 65).

Решение. Если $M(x; x^2)$ — произвольная точка на графике заданной функции, то $AM = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-1,5)^2} = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2,25}$. Ясно, что AM наименьшее тогда и только тогда, когда принимает наименьшее значение AM^2 . Обозначим AM^2 буквой z . Теперь мы можем переформулировать данную задачу: требуется найти точку, в которой достигает своего наименьшего значения функция $z = x^4 - 2x^2 + 2,25$.

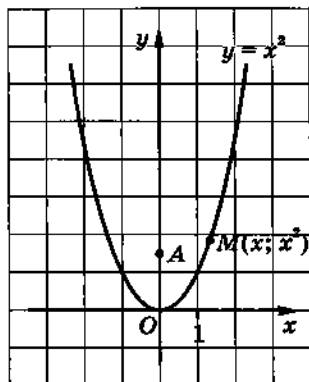


Рис. 65

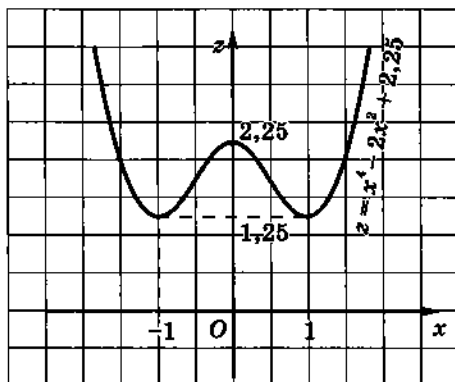


Рис. 66

Имеем: $z' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$. В точках $x = -1$, $x = 1$ функция достигает минимума, причем в обоих случаях $y_{\min} = 1,25$, а в точке $x = 0$ функция достигает максимума, причем $y_{\max} = 2,25$. График функции представлен на рисунке 66, он помогает установить, что в найденных точках минимума функция достигает своего наименьшего значения.

Таким образом, точек, ближайших к точке A , оказалось две: $(-1; 1)$ и $(1; 1)$.

32.36. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

Решение. Первый этап. Составление математической модели.

1) Оптимизируемая величина — площадь S трапеции, обозначим ее y .

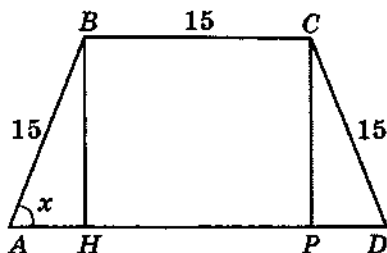


Рис. 67

2) Примем за независимую переменную x угол при большем основании трапеции (рис. 67); реальные границы изменения x таковы: $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

3) Вычислим площадь трапеции. Имеем: $BH = 15 \sin x$, $AH = PD = 15 \cos x$, $AD = 15 + 30 \cos x$. Значит,

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = (15 + 15 \cos x) 15 \sin x = 225 \sin x (1 + \cos x).$$

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$y = 225 \sin x (1 + \cos x), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Второй этап. Работа с составленной моделью.

$$y' = 225 (\cos x (1 + \cos x) + \sin x (-\sin x)) = 225 (2 \cos^2 x + \cos x - 1).$$

Из уравнения $y' = 0$ получаем: $\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Эта совокупность тригонометрических уравнений имеет на рассматриваемом промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ единственный корень $x = \frac{\pi}{3}$.

Если $x < \frac{\pi}{3}$, то $y' > 0$; если $x > \frac{\pi}{3}$, то $y' < 0$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{3}$ — единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, причем точка максимума, поэтому именно при этом значении x функция достигает наибольшего значения.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

В задаче не требуется найти наибольшее значение функции, а требуется указать, при какой длине основания AD оно достигается. Имеем:

$$AD = 15 + 30 \cos x = 15 + 30 \cos \frac{\pi}{3} = 30.$$

Ответ: 30 см.

32.37. Из прямоугольной трапеции с основаниями a и b и высотой h вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:

а) $a = 80$, $b = 60$, $h = 100$;

б) $a = 24$, $b = 8$, $h = 12$?

Решение. а) Первый этап. Составление математической модели.

1) Оптимизируемая величина — площадь S прямоугольника $AKMP$, вписанного в прямоугольную трапецию $ABCD$, у которой $AB = 100$, $BC = 60$, $AD = 80$ (рис. 68).

2) Примем за независимую переменную x длину отрезка KM ; определим реальные границы изменения x : $60 \leq x < 80$.

3) Вычислим площадь прямоугольника. Имеем

$$\frac{MP}{CH} = \frac{PD}{HD}, \text{ значит, } \frac{MP}{100} = \frac{80 - x}{20},$$

откуда находим $MP = 5(80 - x)$.

$$S = AP \cdot MP = x \cdot 5(80 - x) = 5(80x - x^2).$$

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$S = 5(80x - x^2), \quad 60 \leq x < 80.$$

Второй этап. Работа с составленной моделью.

$S' = 5(80 - 2x)$. $S' = 0$ при $x = 40$, но эта точка не принадлежит полуинтервалу $[60; 80)$. Замечаем, что на этом полуинтервале выполняется неравенство $S' < 0$, т.е. функция убывает, поэтому своего наибольшего значения она достигает в левом конце полуинтервала: $S_{\text{наиб}} = S(60) = 6000$.

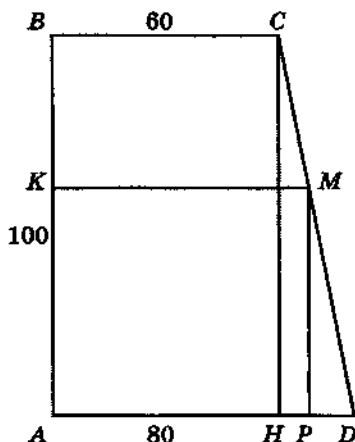


Рис. 68

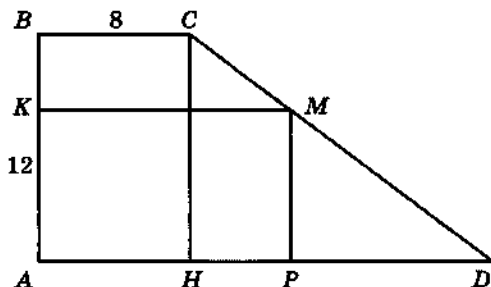


Рис. 69

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

Наибольшую площадь, равную 6000, имеет прямоугольник $ABCH$.

б) Оптимизируемая величина — площадь S прямоугольника $AKMP$, вписанного в прямоугольную трапецию $ABCD$, у которой $AB = 12$, $BC = 8$, $AD = 24$ (рис. 69).

Примем за независимую переменную x длину отрезка KM ; определим реальные границы изменения x : $8 \leq x < 24$.

Вычислим площадь прямоугольника. Имеем

$$\frac{MP}{CH} = \frac{PD}{HD}, \text{ следовательно, } \frac{MP}{12} = \frac{24 - x}{16},$$

откуда находим $MP = 0,75(24 - x)$.

$$S = AP \cdot MP = x \cdot 0,75(24 - x) = 0,75(24x - x^2).$$

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции:

$$S = 0,75(24x - x^2), \quad 8 \leq x < 24.$$

$S' = 1,5(12 - x)$; $S' = 0$ при $x = 12$ — это единственная точка экстремума, а именно максимума функции. Поэтому в данном случае $S_{\text{наиб}} = S(12) = 108$.

Наибольшую площадь, равную 108, имеет прямоугольник $AKMP$, где $KM = 12$.

32.38. У пятиугольника $ABCDE$ углы A , B и E — прямые, $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Вписать в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади и вычислить эту наибольшую площадь, если:

а) $a = 7$, $b = 9$, $c = 3$, $m = 5$;

б) $a = 7$, $b = 18$, $c = 3$, $m = 1$.

Решение. а) На рисунке 70 изображен пятиугольник $ABCDE$. Для наибольшего по площади вписанного прямоугольника воз-

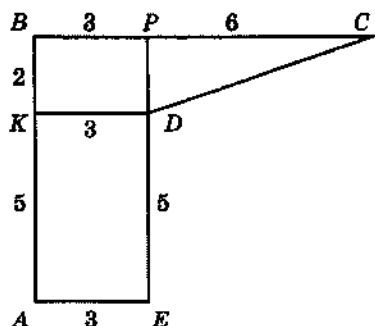


Рис. 70

можны два варианта: либо этим прямоугольником будет $ABPE$ с площадью, равной 21, либо искомый прямоугольник следует вписать в прямоугольную трапецию $KBCD$. В данном случае второй вариант нас не интересует, так как площадь указанной трапеции равна 12, поэтому вписанный в нее прямоугольник будет иметь площадь меньше 12.

Итак, требуемый прямоугольник — прямоугольник $ABPE$ с площадью 21. Полезно заметить учащимся, что здесь производная нам не понадобилась.

б) На рисунке 71 изображен пятиугольник $ABCDE$. Для наибольшего по площади вписанного прямоугольника возможны два варианта: либо этим прямоугольником будет $ABPE$ с площадью, равной 21, либо искомый прямоугольник следует вписать в прямоугольную трапецию $KBCD$. В данном случае нас интересует второй вариант, поскольку площадь указанной трапеции равна 63, что намного больше площади прямоугольника $ABPE$.

Рассуждая как в № 32.37, б), находим, что $S_{\text{наиб}} = 32,4$.

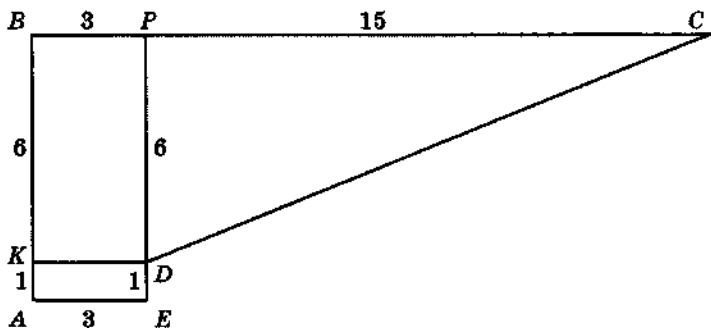


Рис. 71

32.39. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня его глаз на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен встать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

Решение. На рисунке 72 представлена геометрическая модель ситуации: OF — постамент, FP — статуя, O — основание постамента, M — точка, в которой находится человек, AM — рост человека (до уровня глаз), $PK = a$, $FK = b$, $PF = a - b$, $\angle KAF = \alpha$.

Первый этап. Составление математической модели.

1) Оптимизируемая величина — угол PAF , обозначим его y .

2) Примем за независимую переменную x расстояние OM ; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < +\infty$.

3) Вычислим интересующий нас угол (или какую-либо тригонометрическую функцию угла). Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{FK}{AK} = \frac{b}{x}; \quad \operatorname{tg} (\alpha + y) = \frac{PK}{AK} = \frac{a}{x}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} (\alpha + y) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{b}{x} + z}{1 - \frac{b}{x} \cdot z} = \frac{b + zx}{x - bz}$$

(здесь z обозначен $\operatorname{tg} y$).

Итак,

$$\frac{b + zx}{x - bz} = \frac{a}{x},$$

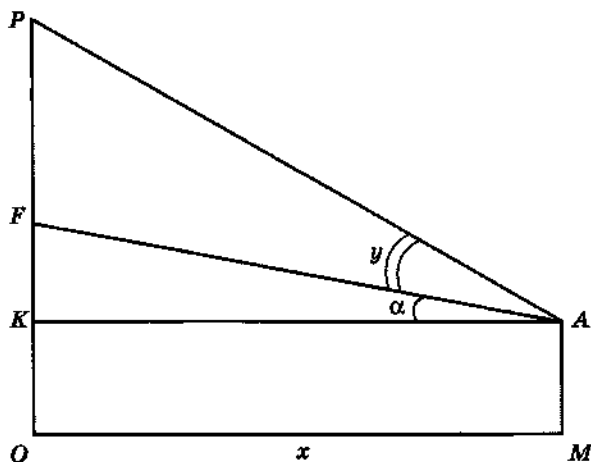


Рис. 72

откуда находим:

$$z = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}.$$

В задаче речь идет об $y_{\text{наиб}}$. Но наибольшему значению угла y будет соответствовать и наибольшее значение тангенса угла, т. е. $z_{\text{наиб}}$.

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции:

$$z = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}, \quad x > 0.$$

Второй этап. Работа с составленной моделью.

$$z' = \frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2+ab)^2};$$

$z' = 0$ при $x = \sqrt{ab}$ — это единственная точка экстремума функции, причем точка максимума. Следовательно, $z_{\text{наиб}}$ достигается именно в этой точке.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

В задаче не требуется найти наибольшее значение функции, а требуется указать, на каком расстоянии от памятника должен стоять человек. Это расстояние OM мы обозначили буквой x и выяснили, что

$$x = \sqrt{ab}.$$

Ответ: $OM = \sqrt{ab}$.

32.40. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время он может добраться от базы до станции?

Решение. На рисунке 73 представлена геометрическая модель ситуации, BMS — маршрут пешехода.

Первый этап. Составление математической модели.

1) Оптимизируемая величина — время t движения пешехода от базы B до станции S .

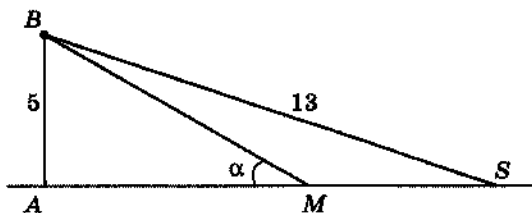


Рис. 73

2) Примем за независимую переменную x угол BMA . Точка M может занять на отрезке AS любое положение, вне пределов этого отрезка выбирать точку M бессмысленно. Если M совпадает с S , то $x = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$. Если M совпадает с A , то $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому реальные границы изменения x таковы: $\operatorname{arctg} \frac{5}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3) Вычислим время движения пешехода. Имеем:

$$BM = \frac{5}{\sin x};$$

на этом участке пути пешеход идет со скоростью 3 км/ч, значит, время t_1 , затраченное на этот путь, выразится формулой

$$t_1 = \frac{5}{3 \sin x}.$$

Далее, $MS = AS - AM = 12 - 5 \operatorname{ctg} x$; на этом участке пути пешеход идет со скоростью 5 км/ч, следовательно, время t_2 , затраченное на этот путь, выразится формулой

$$t_2 = \frac{12 - 5 \operatorname{ctg} x}{5}.$$

В итоге имеем:

$$t = \frac{5}{3 \sin x} + \frac{12 - 5 \operatorname{ctg} x}{5}.$$

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения полученной функции на отрезке $\left[\operatorname{arctg} \frac{5}{12}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Второй этап. Работа с составленной моделью.

Продифференцировав функцию, получим:

$$t' = \frac{3 - 5 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Единственная стационарная точка, принадлежащая заданному отрезку, — точка $x = \operatorname{arccos} \frac{3}{5}$, причем слева от нее, в силу убывания функции $y = \cos x$, выполняется неравенство $\cos x > \frac{3}{5}$, а справа — неравенство $\cos x < \frac{3}{5}$. Это значит, что слева от указанной точки $t' < 0$, а справа $t' > 0$; следовательно, $x = \operatorname{arccos} \frac{3}{5}$ — единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, причем точка минимума. Именно в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

Если $\cos x = \frac{3}{5}$, то $\sin x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{3}{4}$ и, значит,

$$t = \frac{5}{3 \sin x} + \frac{12 - 5 \operatorname{ctg} x}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{5} \left(12 - 5 \cdot \frac{3}{4} \right) = 3 \frac{11}{15}.$$

Ответ: 3 ч 44 мин.

Глава 6

34.22. а) Построить график функции

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}}.$$

Решение. Сократив дробь, получим

$$y = \sqrt[3]{x - 1}.$$

Искомый график получается из графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ сдвигом на 1 вправо и выкалыванием точки с абсциссой $x = 4$ (рис. 74).

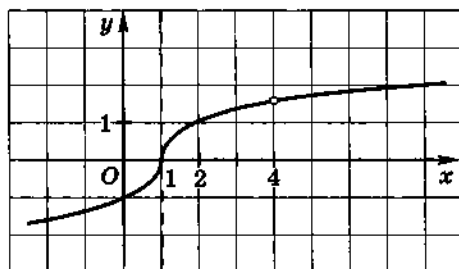
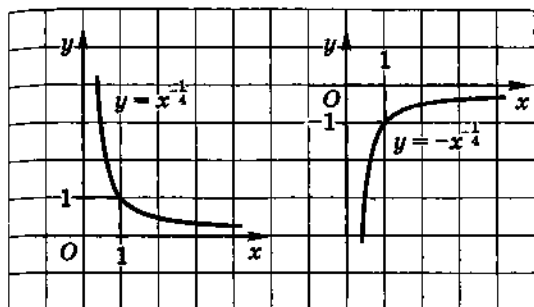


Рис. 74

38.33. б) Построить график функции $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{x+4}} + 2$.

Решение. Речь идет о построении графика степенной функции $y = -(x+4)^{-\frac{1}{4}} + 2$. Стандартный график $y = x^{-\frac{1}{4}}$ выглядит так, как показано на рисунке 75, а. Нам нужно отобразить его симметрично относительно оси абсцисс, т. е. построить сначала график функции $y = -x^{-\frac{1}{4}}$ (рис. 75, б), а затем осуществить его параллельный перенос так, чтобы началом координат стала точка $(-4; 2)$. Требуемый график представлен на рисунке 76.



а

б

Рис. 75

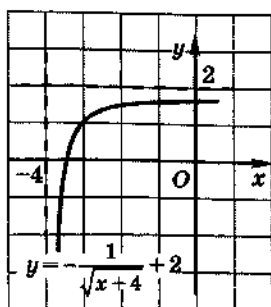


Рис. 76

38.34. г) Решить графически неравенство $x^{\frac{2}{3}} > x - 4$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x - 4$ (рис. 77), приходим к выводу, что решение неравенства имеет вид $0 \leq x < 8$.

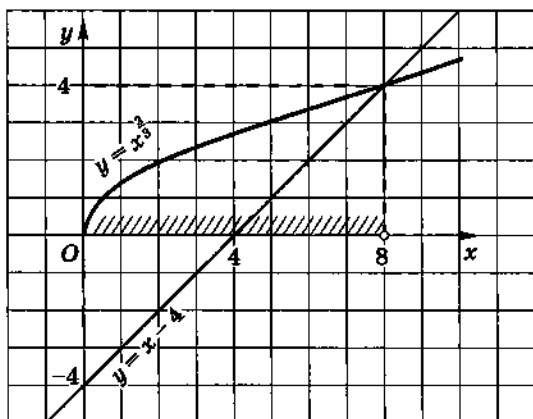


Рис. 77

38.35. г) Решить уравнение $g'(x) = 0$, если $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2x$.

Решение. $g'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} - \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6} x^{\frac{7}{6}-1} - 2 = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} - 2$. Речь идет о решении уравнения $x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} - 2 = 0$. Введя новую пере-

менную $y = x^{\frac{1}{6}}$, получим квадратное уравнение $y^2 - y - 2 = 0$ с корнями 2 и -1 ; значит, задача сводится к решению совокупности уравнений: $x^{\frac{1}{6}} = 2$; $x^{\frac{1}{6}} = -1$. Из первого уравнения находим $x = 64$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 64.

38.37. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы и построить ее график:

а) $y = \sqrt{x} - x$; б) $y = x\sqrt{x+2}$.

Решение. а) Функция имеет одну точку экстремума $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ — точка максимума; ее график пересекает ось абсцисс в точках 0 и 1, он представлен на рисунке 78. Обратите внимание, что график касается оси y в начале координат.

б) Функция имеет одну точку экстремума $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ — точка минимума; ее график пересекает ось абсцисс в точках 0 и -2 , он изображен на рисунке 79. Обратите внимание, что график касается прямой $x = -2$ и что $y_{\min} \approx -1,1$.

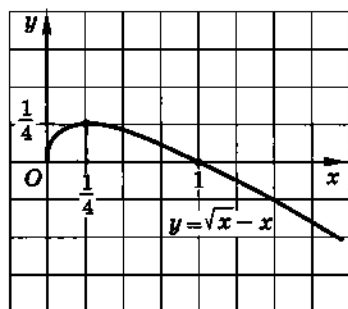


Рис. 78

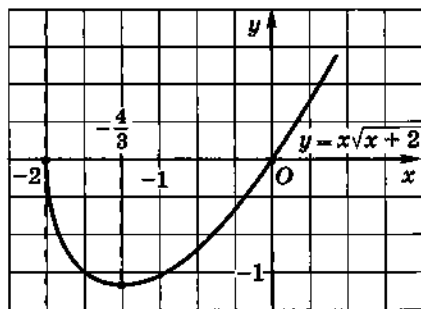


Рис. 79

38.38. Используя свойство монотонности функций, решить уравнения:

а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$;

б) $\sqrt[4]{10 + 3x} = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$.

Решение. а) Функция $y = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ возрастает ($y' > 0$), а функция $y = \sqrt[3]{14 - 3x}$ убывает. При $x = 2$ уравнение обраца-

ется в верное числовое равенство $2 = 2$. Следовательно, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

б) Рассуждая аналогично, получаем $x = 2$.

38.39. а) Провести касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$ из точки $M(0; 1)$.

Решение. Имеем $x = a$ — абсцисса точки касания; $f(a) = \sqrt{a}$;
 $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Составим уравнение касательной в общем виде:

$$y = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a).$$

Подставив в это уравнение координаты точки M , находим, что $a = 4$. Уравнение касательной при $a = 4$ выглядит так:
 $y = 0,25x + 1$.

Глава 7

40.25. б) Решить уравнение $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$.

Решение. $12^x - 6 \cdot 6^x + 8 \cdot 3^x = 0$; $3^x(4^x - 6 \cdot 2^x + 8) = 0$;
 $2^x = 2$ или $2^x = 4$.

Ответ: 1, 2.

40.27. в) Решить уравнение $3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0$.

Решение. Это так называемое однородное показательное уравнение

$$3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x \cdot 7^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0.$$

Для решения этого уравнения разделим обе его части почленно на 7^{2x} и введем новую переменную $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$. Получим квадратное уравнение $3y^2 - 4y - 7 = 0$ с корнями $-1, \frac{7}{3}$.

Уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^x = -1$ корней не имеет, а из уравнения $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{7}{3}$ получаем $x = -1$.

40.50. Решить неравенство:

а) $2x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2 - 2x + 2}$;

б) $2^{x^2 - 4x + 5} \geq 4x - 2 - x^2$.

Решение. а) Положим $t = x^2 - 2x + 2$; тогда $2x + 2 - x^2 = (-x^2 + 2x - 2) + 4 = 4 - t$. Неравенство примет вид $4 - t \geq 3^t$.

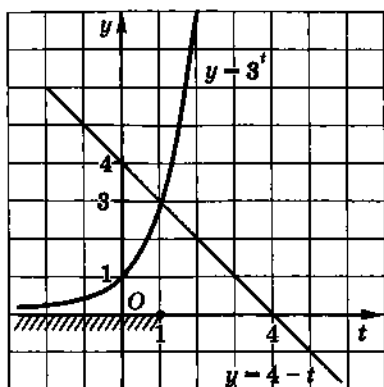


Рис. 80

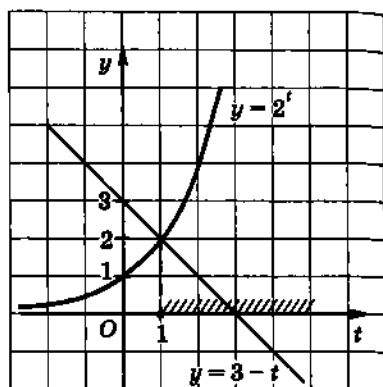


Рис. 81

Решив его графически (рис. 80), получим: $t \leq 1$. Далее:

$$x^2 - 2x + 2 \leq 1;$$

$$(x - 1)^2 \leq 0;$$

$$x = 1.$$

б) Положим $t = x^2 - 4x + 5$; тогда неравенство примет вид

$$2^t \geq 3 - t.$$

Решив его графически (рис. 81), получим: $t \geq 1$. Далее:

$$x^2 - 4x + 5 \geq 1;$$

$$(x - 2)^2 \geq 0;$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

43.22. Вычислить: а) $\log_4 \sin \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} \log_4 \sin^3 \frac{13\pi}{6} + \log_4 \sin \frac{7\pi}{12}$;

б) $\frac{1}{2} \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)^2 - \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^{-1}$.

Решение. а) Учтем, что $\frac{1}{3} \log_4 \sin^3 \frac{13\pi}{6} = \log_4 \sin \frac{13\pi}{6} =$
 $= \log_4 \sin \frac{\pi}{6} = \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ и что $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12}$.

Получим:

$$\begin{aligned} \log_4 \sin \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} \log_4 \sin^3 \frac{13\pi}{6} + \log_4 \sin \frac{7\pi}{12} &= \log_4 \sin \frac{\pi}{12} + \log_4 \cos \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} = \\ &= \log_4 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right) - \frac{1}{2} = \log_4 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \\ &= -1 - 0,5 = -1,5. \end{aligned}$$

б) Поскольку $\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} > 0$, мы имеем право преобразовать выражение $\frac{1}{2} \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$ к виду $\log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)$.

Далее последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)^2 - \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^{-1} &= \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) + \\ &+ \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) = \log_8 \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) = \\ &= \log_8 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = \log_8 \cos \frac{\pi}{4} = \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

43.34. Сравнить числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

Решение. а) Пусть $\log_3 4 = a$, $\sqrt[4]{2} = b$. Имеем:

$$a = \log_3 4 = \frac{1}{4} \cdot \log_3 4^4 = \frac{1}{4} \cdot \log_3 256 > \frac{1}{4} \cdot \log_3 243 = \frac{5}{4};$$

$$b = \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{\frac{625}{256}} = \frac{5}{4}.$$

Итак, получили, что $a > \frac{5}{4}$, $b < \frac{5}{4}$. Следовательно, $a > b$.

б) Пусть $\log_2 3 = a$, $\sqrt[3]{7} = b$. Имеем:

$$a = \log_2 3 = \frac{1}{5} \cdot \log_2 3^5 = \frac{1}{5} \cdot \log_2 243 < \frac{1}{5} \cdot \log_2 256 = \frac{8}{5};$$

$$b = \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{\frac{512}{125}} = \frac{8}{5}.$$

Итак, получили, что $a < \frac{8}{5}$, $b > \frac{8}{5}$. Значит, $a < b$.

46.10. а) Вычислить

$$\frac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{224} 2}.$$

Решение. Заданное числовое выражение можно переписать в виде

$$\log_2 56 \cdot \log_2 28 - \log_2 7 \cdot \log_2 224.$$

Далее

$$(3 + \log_2 7)(2 + \log_2 7) - \log_2 7(5 + \log_2 7).$$

Положим $\log_2 7 = a$, получим:

$$(3 + a)(2 + a) - a(5 + a) = 6.$$

46.11. Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Вычислить: а) $\log_4 12$; б) $\log_6 18$; в) $\log_{0,5} 3$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 24$.

Решение. а) $\log_4 12 = \frac{\lg 12}{\lg 4} = \frac{2\lg 2 + \lg 3}{2\lg 2} = \frac{2a + b}{2a}$;

б) $\log_6 18 = \frac{\lg 18}{\lg 6} = \frac{2\lg 3 + \lg 2}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{a + 2b}{a + b}$;

в) $\log_{0,5} 3 = \frac{\lg 3}{\lg 0,5} = \frac{\lg 3}{-\lg 2} = -\frac{b}{a}$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 24 = \frac{\lg 24}{\lg \frac{1}{3}} = \frac{\lg 3 + 3\lg 2}{-\lg 3} = -\frac{3a + b}{b}$.

46.14. Решить уравнение: а) $\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$;

б) $1 + \log_x 5 \cdot \log_7 x = \log_5 35 \cdot \log_x 5$.

Решение. а) $\frac{\log_4 (x + 12)}{\log_2 x} = 1$; $\frac{1}{2} \log_2 (x + 12) = \log_2 x$;
 $x + 12 = x^2$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Первый из найденных корней — посторонний.

б) $1 + \frac{1}{\log_5 x} \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 7} = \log_5 35 \cdot \frac{1}{\log_5 x}$; $1 + \frac{1}{\log_5 7} = \frac{\log_5 35}{\log_5 x}$;

$\frac{\log_5 7 + 1}{\log_5 7} = \frac{\log_5 7 + 1}{\log_5 x}$; $\log_5 x = \log_5 7$; $x = 7$.

Ответ: а) 4; б) 7.

46.15. а) Решить уравнение

$$\log_{2x+1} (5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x} (1 + 4x + 4x^2) = 4.$$

Решение. Имеем: $5 + 8x - 4x^2 = (5 - 2x)(2x + 1)$;

$$1 + 4x + 4x^2 = (2x + 1)^2.$$

Положим $a = 2x + 1$, $b = 5 - 2x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\log_a ab + \log_b a^2 = 4.$$

Далее:

$$\log_a a + \log_a b + 2 \log_b a = 4;$$

$$1 + \log_a b + \frac{2}{\log_a b} = 4.$$

Введя новую переменную $z = \log_a b$ и решив соответствующее рациональное уравнение, получим: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, т.е.

$$\log_a b = 1; \quad \log_a b = 2$$

или

$$a = b; \quad a^2 = b;$$

$$2x + 1 = 5 - 2x; \quad (2x + 1)^2 = 5 - 2x.$$

Из первого уравнения получаем $x = 1$, из второго $x = -2$,
 $x = \frac{1}{2}$.

Проверка. ОДЗ исходного уравнения задается системой условий:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ 2x + 1 \neq 1, \\ 5 - 2x > 0, \\ 5 - 2x \neq 1 \end{cases}$$

(неравенства $5 + 8x - 4x^2 > 0$ и $1 + 4x + 4x^2 > 0$ можно в систему условий не включать, поскольку они вытекают из входящих в систему линейных неравенств). Значение $x = -2$ не удовлетворяет первому условию, следовательно, $x = -2$ — посторонний корень. Остальные найденные выше корни удовлетворяют всем условиям.

Ответ: $1, \frac{1}{2}$.

46.16. а) Решить неравенство

$$\log_9 x^2 + \log_3^2 (-x) < 2.$$

Решение. Здесь следует учесть, что ОДЗ неравенства задается условием $x < 0$. Тогда

$$\log_9 x^2 = \log_{\sqrt{9}} \sqrt{x^2} = \log_3 |x| = \log_3 (-x).$$

«Напрашивается» новая переменная $y = \log_3 (-x)$, с помощью которой заданное неравенство переписываем в более простом виде:

$$y^2 + y - 2 < 0.$$

Находим последовательно:

$$-2 < y < 1,$$

$$-2 < \log_3 (-x) < 1,$$

$$\frac{1}{9} < -x < 3,$$

$$-3 < x < -\frac{1}{9}.$$

47.26. в) Провести касательную к графику функции $y = e^{\frac{x}{3}}$ так, чтобы она проходила через начало координат.

Решение. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x = a$:

$$y = e^{\frac{a}{3}} + \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{a}{3}}(x - a). \quad (1)$$

Подставив в это уравнение заданные координаты $x = 0, y = 0$, получим:

$$0 = e^{\frac{a}{3}}(1 - \frac{a}{3}); \quad a = 3.$$

Осталось подставить найденное значение a в уравнение (1):

$$y = e + \frac{1}{3} \cdot e(x - 3),$$

$$y = \frac{ex}{3}.$$

47.27. а) При каком значении параметра a прямая $y = 3x - 4 + a$ является касательной к графику функции $y = \ln(3x - 4)$?

Решение. Найдем производную функции $y = \ln(3x - 4)$:

$$y' = \frac{3}{3x - 4}.$$

По условию угловой коэффициент касательной равен 3, следовательно, должно выполняться равенство

$$3 = \frac{3}{3x - 4},$$

откуда находим $x = \frac{5}{3}$ — это абсцисса точки касания.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = \ln(3x - 4)$ в точке $x = \frac{5}{3}$:

$$y = \ln 1 + 3\left(x - \frac{5}{3}\right);$$

$$y = 3x - 5.$$

По условию уравнение касательной таково: $y = 3x - 4 + a$. Значит,

$$-5 = -4 + a; \quad a = -1.$$

47.28. При каких значениях параметра a функция $y = x^6 e^{-x}$ на интервале $(a; a + 7)$: а) имеет одну точку экстремума; б) имеет две точки экстремума; в) убывает; г) возрастает?

Решение. $y' = 6x^5e^{-x} - x^6e^{-x} = x^5e^{-x}(6 - x)$.

Функция имеет две стационарные точки: $x = 0$ и $x = 6$, причем $y' < 0$ при $x < 0$ или при $x > 6$; $y' > 0$ при $0 < x < 6$ (рис. 82). Следовательно, $x = 0$ — точка минимума, а $x = 6$ — точка максимума функции.

а) Функция будет иметь на интервале $(a; a + 7)$ одну точку экстремума в одном из двух случаев (см. рис. 82):

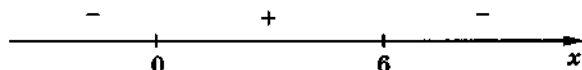


Рис. 82

1) если $a < 0$, $a + 7 > 0$, $a + 7 \leq 6$ (в этом случае точка $x = 0$ принадлежит заданному интервалу, а точка $x = 6$ — не принадлежит);

2) если $a \geq 0$, $a < 6$, $a + 7 > 6$ (в этом случае точка $x = 6$ принадлежит заданному интервалу, а точка $x = 0$ — не принадлежит).

В первом случае имеем $-7 < a \leq -1$; во втором $0 \leq a < 6$.

б) Функция будет иметь на интервале $(a; a + 7)$ две точки экстремума, если (см. рис. 82) $a < 0$ и в то же время $a + 7 > 6$, т. е. при $-1 < a < 0$.

в) Функция будет убывать на интервале $(a; a + 7)$, если этот интервал принадлежит лучу $(-\infty; 0]$ или лучу $[6; +\infty)$. Первая ситуация имеет место при условии $a + 7 \leq 0$, т. е. при $a \leq -7$. Вторая имеет место при условии $a \geq 6$.

г) Функция будет возрастать на интервале $(a; a + 7)$, если этот интервал принадлежит отрезку $[0; 6]$. Это не выполняется ни при каком значении a .

Глава 8

48.20. б) Найти ту первообразную для функции $y = 3x^3$, график которой касается прямой $y = 3x + 4,75$.

Решение. Запишем общий вид первообразных $F(x) = 0,75x^4 + C$. Угловой коэффициент касательной равен 3, значит, $F'(x) = 3$, т. е. $3x^3 = 3$, $x = 1$. Составим уравнение касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке $x = 1$:

$$y = F(1) + F'(1)(x - 1);$$

$$y = 0,75 + C + 3(x - 1);$$

$$y = 3x + (C - 2,25).$$

Из условия следует, что $C - 2,25 = 4,75$. Значит, $C = 7$, а потому искомая первообразная такова: $F(x) = 0,75x^4 + 7$.

48.21. Известно, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$. Найти точки экстремума функции $y = F(x)$, если: а) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x - 1}}$; б) $f(x) = (25x - x^3) \ln x$;

в) $f(x) = \frac{3x - 6}{\sqrt[3]{2x + 4}}$; г) $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{\sqrt[3]{2 - x}}$.

Решение. а) $D(f) = (1; +\infty)$. В этой области функция $y = f(x)$ всюду определена и обращается в нуль в точках 2 и 3. Это — стационарные точки функции $y = F(x)$. Знаки производной функции $y = F(x)$, т. е. функции $y = f(x)$, схематически представлены на рисунке 83. Отсюда следует, что $x = 2$ — точка максимума, а $x = 3$ — точка минимума функции $y = F(x)$.

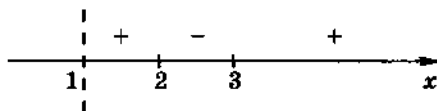


Рис. 83

б) $D(f) = (0; +\infty)$. В этой области функция $y = f(x)$ всюду определена и обращается в нуль в точках 1 и 5. Это — стационарные точки функции $y = F(x)$. Знаки производной функции $y = F(x)$, т. е. функции $y = f(x)$, схематически представлены на рисунке 84. Отсюда следует, что $x = 1$ — точка минимума, а $x = 5$ — точка максимума функции $y = F(x)$.

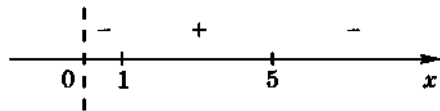


Рис. 84

в) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. В этой области функция $y = f(x)$ обращается в нуль в точке 2. Это — стационарная точка функции $y = F(x)$. Но у функции $y = F(x)$ есть и критическая точка — точка, в которой ее производная не существует, — это точка -2 . Знаки производной функции $y = F(x)$, т. е. функции $y = f(x)$, схематически представлены на рисунке 85. Отсюда следует, что $x = 2$ — точка минимума, а $x = -2$ — точка максимума функции $y = F(x)$.

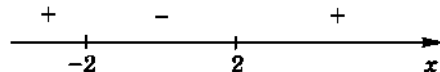


Рис. 85

г) $D(f) = (-\infty; 2)$. В этой области функция $y = f(x)$ всюду определена и обращается в нуль в точках -3 и 0 . Это — стационарные точки функции $y = F(x)$. Знаки производной функции $y = F(x)$, т. е. функции $y = f(x)$, схематически представлены на рисунке 86. Отсюда следует, что $x = -3$ — точка минимума, а $x = 0$ — точка максимума функции $y = F(x)$.

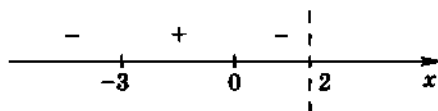


Рис. 86

48.22. Известно, что функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$. Что больше — $F(a)$ или $F(b)$, если:

а) $f(x) = (2x - 10)\sqrt{x - 3}$; $a = 3,3$, $b = 4,1$;

б) $f(x) = (3x + 60)\sqrt[3]{2x - 4}$; $a = 15$, $b = 17$?

Решение. а) $D(f) = [3; +\infty)$. В этой области функция $y = f(x)$ всюду определена и обращается в нуль в единственной внутренней точке 5 . Это — стационарная точка функции $y = F(x)$. Знаки производной функции $y = F(x)$, т. е. функции $y = f(x)$, схематически представлены на рисунке 87. Отсюда следует, что функция $y = F(x)$ убывает на отрезке $[3; 5]$, а потому $F(3,3) > F(4,1)$.

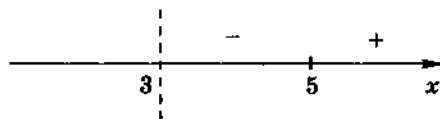


Рис. 87

б) $D(f) = (-\infty; +\infty)$. В этой области функция $y = f(x)$ всюду определена и обращается в нуль в точках -20 и 2 . Это — стационарные точки функции $y = F(x)$. Знаки производной функции $y = F(x)$, т. е. функции $y = f(x)$, схематически представлены на рисунке 88. Отсюда следует, что функция $y = F(x)$ возрастает на луче $[2; +\infty)$, а потому $F(15) < F(17)$.

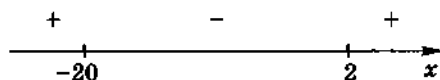


Рис. 88

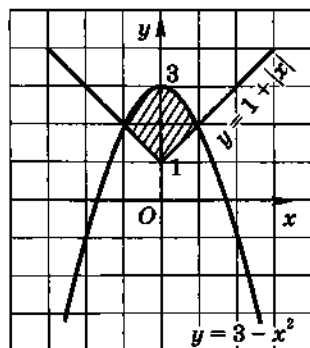


Рис. 89

49.26. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3 - x^2$, $y = 1 + |x|$.

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 89. Она симметрична относительно оси ординат, а потому ее площадь можно найти так: вычислить площадь части фигуры, расположенной в правой полуплоскости, и полученное число умножить на 2. Но если мы находимся в правой полуплоскости, то $1 + |x| = 1 + x$. Осталось провести необходимые вычисления:

$$S = 2 \int_0^1 ((3 - x^2) - (1 + x)) dx = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x) dx = 2 \frac{1}{3}.$$

49.27. Вычислить: а) $\int_{-3}^6 f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 2, \\ 6 - x, & \text{если } x > 2; \end{cases}$

б) $\frac{1}{4} \int_4^2 f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x^3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Решение. а) График кусочной функции $y = f(x)$ представлен на рисунке 90. Штриховкой выделена фигура, площадь которой требуется найти. Она состоит из криволинейной трапеции с основанием $[-3; 2]$ и прямоугольного равнобедренного

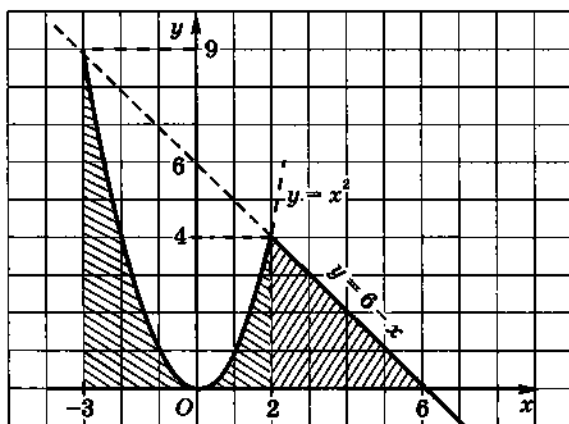


Рис. 90

треугольника с катетом 4 и, следовательно, с площадью, равной 8. Значит,

$$S = \int_{-3}^2 x^2 dx + 8 = 19 \frac{2}{3}.$$

б) График кусочной функции $y = f(x)$ представлен на рисунке 91. Штриховкой выделена фигура, площадь которой требуется найти. Она состоит из двух криволинейных трапеций: одна — с основанием $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$, другая — с основанием $[1; 2]$. Значит,

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^2 x^3 dx = 4 \frac{3}{4}.$$

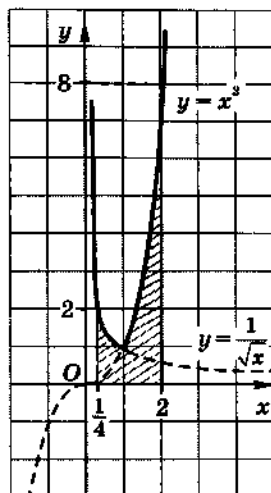


Рис. 91

49.29. Используя геометрические соображения, вычислить интеграл:

а) $\int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx$; б) $\int_{-1}^0 \sqrt{-x^2 - 2x} dx$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4x - x^2}; \\ y^2 &= 4x - x^2; \\ (x - 2)^2 + y^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

Это уравнение окружности с радиусом $r = 2$ и центром в точке $(2; 0)$. Значит, заданным интегралом выражается площадь половины круга (рис. 92). Получим $S = 0,5\pi r^2 = 0,5\pi \cdot 4 = 2\pi$.

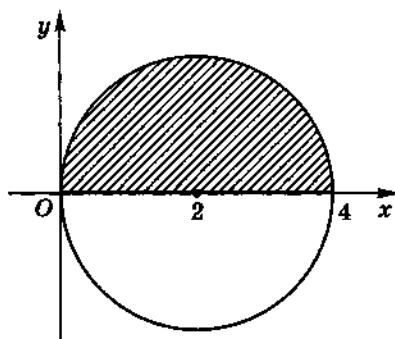


Рис. 92

б) Имеем:

$$y = \sqrt{-x^2 - 2x};$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1^2.$$

Это уравнение окружности радиусом $r = 1$ с центром в точке $(-1; 0)$. Следовательно, заданным интегралом выражается площадь четверти круга (рис. 93).

$$\text{Имеем: } S = 0,25\pi r^2 = 0,25 \pi \cdot 1 = 0,25\pi.$$

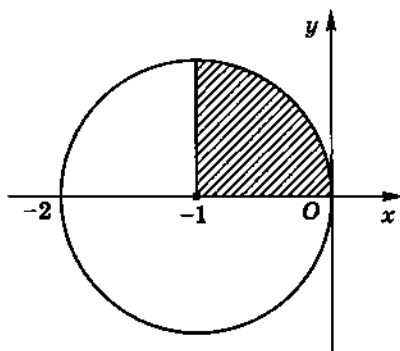


Рис. 93

49.30. Используя геометрические соображения, вычислить интеграл:

а) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2} dx$; б) $\int_{-4}^4 \sqrt{64 - x^2} dx$.

Решение. а) Фигура, площадь которой выражается заданным интегралом, выделена на рисунке 94. Она состоит из сектора круга с радиусом 2 и центральным углом 45° и прямоугольного

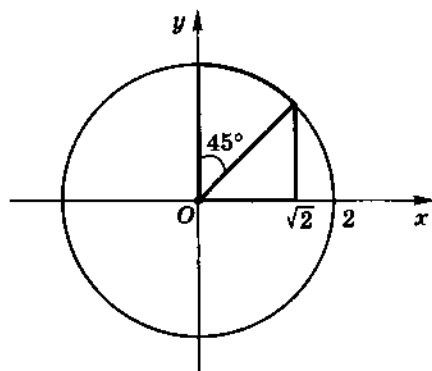


Рис. 94

равнобедренного треугольника с катетом $\sqrt{2}$. Для вычисления площади сектора используем формулу $S = 0,5r^2 \alpha$, где α — центральный угол (в радианах).

$$\text{Имеем: } S = 0,5 \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} + 0,5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} + 1.$$

б) Фигура, площадь которой выражается заданным интегралом, выделена на рисунке 95. Она состоит из сектора круга с радиусом 8 и центральным углом 60° и двух равных прямоугольных треугольников с катетом 4, гипотенузой 8 и углом 60° между ними.

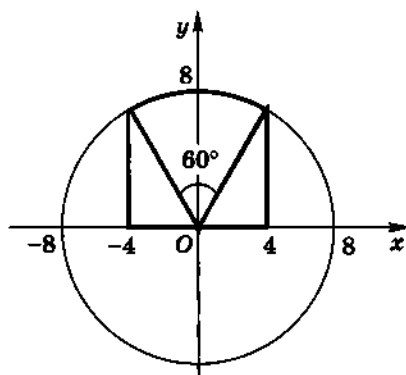


Рис. 95

Имеем:

$$S = 0,5 \cdot 8^2 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0,5 \cdot 8 \cdot 4 \sin 60^\circ = 16 \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \right).$$

49.31. б) Найти площадь параболического сегмента, изображенного на рисунке 96.

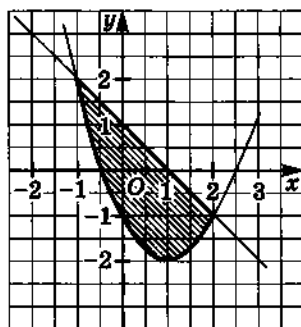


Рис. 96

Решение. Составим уравнение параболы. Учтем, что ее вершина находится в точке $(1; -2)$, значит, уравнение следует искать в виде $y = a(x - 1)^2 - 2$. Учтем еще, что парабола проходит через точку $(0; -1)$, значит, $-1 = a(0 - 1)^2 - 2$; $a = 1$. Итак, получаем: $y = (x - 1)^2 - 2$, т. е. $y = x^2 - 2x - 1$. Парабола и прямая $y = 1 - x$ пересекаются в точках с абсциссами -1 и 2 . Теперь можно без труда вычислить площадь параболического сегмента:

$$S = \int_{-1}^2 ((1 - x) - (x^2 - 2x - 1)) dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = 4,5.$$

49.32. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sin 2x$, $y = \frac{16x^2}{\pi^2}$; в) $y = \cos x$, $y = \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)^2$;

б) $y = x^2 - 1$, $y = \cos \frac{\pi x}{2}$; г) $y = x^2 - 2x$, $y = \sin \frac{\pi x}{2}$.

Решение. а) Имеем (рис. 97):

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin 2x - \frac{16x^2}{\pi^2} \right) dx = \left(-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{16x^3}{3\pi^2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{6 - \pi}{12}.$$

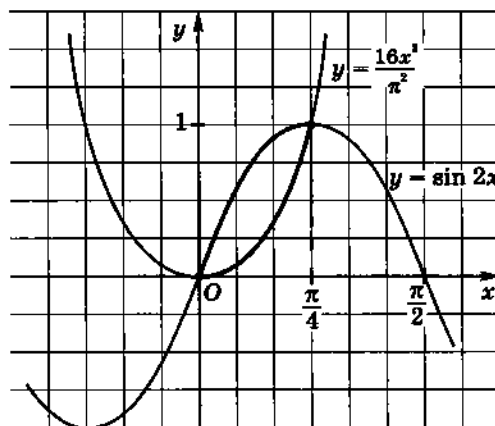


Рис. 97

б) Имеем (рис. 98):

$$S = 2 \cdot \int_0^1 \left(\cos \frac{\pi x}{2} - x^2 + 1 \right) dx = 2 \cdot \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4(\pi + 3)}{3\pi}.$$

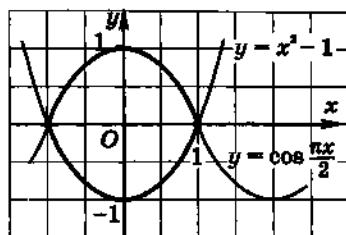


Рис. 98

в) Имеем (рис. 99):

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \left(\frac{2x}{\pi} - 1 \right)^2 \right) dx = \left(\sin x - \frac{4x^3}{3\pi^2} + \frac{2x^2}{\pi} - x \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6 - \pi}{6}.$$

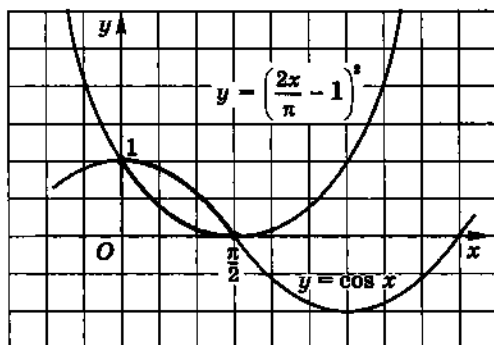


Рис. 99

г) Имеем (рис. 100):

$$S = \int_0^2 \left(\sin \frac{\pi x}{2} - x^2 + 2x \right) dx = \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \bigg|_0^2 = \frac{4(3 + \pi)}{3\pi}.$$

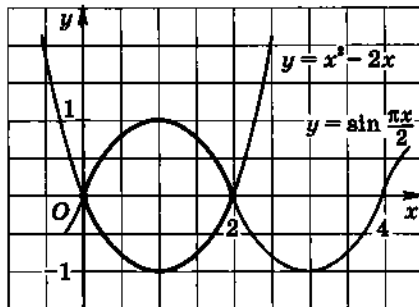


Рис. 100

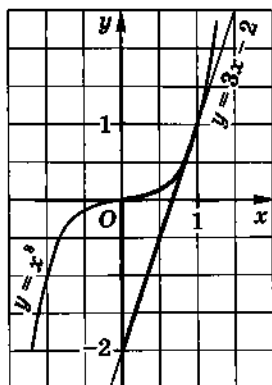


Рис. 101

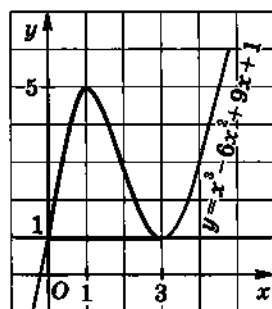


Рис. 102

49.33. а) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$, касательной к нему в точке $x = 1$ и осью y .

Решение. Составим уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x = 1$:

$$y = 1^3 + 3 \cdot 1^2 (x - 1),$$

$$y = 3x - 2.$$

Далее имеем (рис. 101):

$$S = \int_0^1 (x^3 - (3x - 2)) dx = \frac{3}{4}.$$

49.34. а) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ и касательной к нему в точке $x = 3$.

Решение. Заданная функция имеет точку максимума $(1; 5)$ и точку минимума $(3; 1)$. Построим график этой функции (рис. 102). Касательная к нему в точке $x = 3$ параллельна оси абсцисс и имеет с графиком еще одну общую точку $(0; 1)$. Значит,

$$S = \int_0^3 ((x^3 - 6x^2 + 9x + 1) - 1) dx = \frac{27}{4}.$$

Глава 9

Учитывая новизну материала, мы в главе 9, кроме задач с темной точкой, приводим решения и некоторых задач средней трудности.

50.1. Ученик выписал из дневника свои отметки за март. Вот что получилось: 4, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 5, 4, 2, 4, 4, 5, 3, 3.

а) Составьте сгруппированный ряд этих данных.

б) Чему равна мода этого измерения и какова ее кратность?

в) Выпишите таблицу распределения данных.

г) Найдите среднее значение отметок за март.

Решение. а) Сначала выпишем все «двойки». Их две. Затем выпишем все «тройки». Их пять. Потом выпишем полученные учеником 9 «четверок» и, наконец, 4 «пятерки»:

2, 2, 3, 3, 3, 3, 3 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5.

б) «Четверок» больше всего, т. е. 4 — это мода. Всего есть 9 «четверок». Значит, кратность моды равна 9.

| в) | Варианта | | | | Сумма |
|-----------|----------|------|------|-----|-------|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Кратность | 2 | 5 | 9 | 4 | 20 |
| Частота | 0,1 | 0,25 | 0,45 | 0,2 | 1 |

г) Используем составленную таблицу, точнее, ее первую и вторую строки. Получим:

$$2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,45 + 5 \cdot 0,2 = 3,75.$$

50.3. Лидеру партии принесли следующую сводку данных о проголосовавших за его партию по пяти избирательным участкам одного округа:

| | Избирательный участок | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------|-----|-----|-----|-----|
| | № 1 | № 2 | № 3 | № 4 | № 5 |
| Процент проголосовавших за партию | 7 | 8 | 10 | 2 | 9 |
| Число голосовавших, тыс. чел. | 14 | 12 | 10 | 20 | 11 |

а) Найдите среднее значение процента проголосовавших за партию.

б) Подсчитайте общее количество голосовавших на этих пяти участках.

в) Подсчитайте количество проголосовавших за партию на каждом участке.

г) Пройдет ли партия 7%-ный барьер в этом округе?

Решение.

а) $\frac{7 + 8 + 10 + 2 + 9}{5} = \frac{36}{5} = 7,2$. Однако сам этот результат

довольно бессмыслен, так как различные проценты берутся от разного числа голосовавших.

б) $14 + 12 + 10 + 20 + 11 = 67$ тысяч человек.

в) На участке № 1 проголосовали за партию 7 % от 14 000, т. е. $140 \cdot 7 = 980$ избирателей, № 2 — 960, № 3 — 1000, № 4 — 400, № 5 — 990 избирателей.

г) Нет, не пройдет, так как за нее проголосовало 4330 избирателей — около 6,46% участников.

50.5. а) Найдите частоту каждой из букв в строке «Октябрь уж наступил...» из стихотворения «Осень» А. С. Пушкина.

б) Найдите частоту (в процентах) букв слова «гром» среди всех букв двустопия «...Как бы резвяся и играя / Грохочет в небе голубом...» из стихотворения Ф. И. Тютчева.

в) Найдите моду и ее кратность среди всех букв двестишести «Это дерево сосна, / И судьба сосны ясна...» из стихотворения Ю. Минералова.

г) Измеряется длина слов в приведенном отрывке из поэмы А. С. Пушкина «Медный всадник». Составьте ряд данных и постройте гистограмму распределения этих данных.

...Ужасен он в окрестной мгле!
Какая дума на челе!
Какая сила в нем сокрыта!
А в сем коне какой огонь!
Куда ты скачешь, гордый конь,
И где опустишь ты копыта?...

Решение. а) Всего в этой строке 17 букв. При этом практически нет повторений, только буквы «т» и «у» повторены дважды. Их частота равна $\frac{2}{17}$, а частота всех остальных букв — $\frac{1}{17}$.

б) Всего 38 букв, из них 11 раз встретились буквы «г», «р», «о», «м»; частота равна $\frac{11}{38}$, в процентах — примерно 29 %.

в) Мода — буква «с», ее кратность равна 6.

г) 6, 2, 1, 9, 4 / 5, 4, 2, 4 / 5, 4, 1, 3, 7/1, 1, 3, 4, 5, 5 / 4, 2, 7, 6, 4 / 1, 3, 8, 2, 6 — ряд данных.

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9 — группировка.

| | Варианта | | | | | | | | | Сумма |
|-----------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| Кратность | 5 | 4 | 3 | 7 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 30 |

По составленной таблице гистограмма строится обычным образом.

Ниже, в № 50.8—50.11, рассматриваются результаты одного и того же измерения: отметок, полученных учениками за сочинение. Выставлялись две отметки: первая — по литературе, вторая — по русскому языку:

5/4 4/5 3/1 4/3 2/3 3/3 4/3 5/3 3/3 1/2 4/4 4/2 2/1
3/5 3/4 4/3 5/5 4/4 5/4 2/2 2/3 4/3 5/4 2/3 3/3

50.8. Для отметок по литературе:

- выпишите сгруппированный ряд данных;
- составьте таблицу распределения кратностей;
- найдите среднее.

Решение. а) $1, \underbrace{2,2,2,2,2}_5, \underbrace{3,3,3,3,3}_6, \underbrace{4,4,\dots,4}_8, \underbrace{5,5,5,5,5}_5$.

б)

| | Отметки по литературе | | | | | Сумма |
|-----------|-----------------------|---|---|---|---|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Кратность | 1 | 5 | 6 | 8 | 5 | 25 |

в) $\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 5}{25} = 3,44.$

50.9. Для отметок по русскому языку:

- а) выпишите сгруппированный ряд данных;
 б) составьте таблицу распределения кратностей;
 в) найдите среднее.

Решение. а) $\underbrace{1,1}_2, \underbrace{2,2,2}_3, \underbrace{3,3,\dots,3}_6, \underbrace{4,4,4,4,4}_5, \underbrace{5,5}_2$.

б)

| | Отметки по русскому языку | | | | | Сумма |
|-----------|---------------------------|---|----|---|---|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Кратность | 2 | 3 | 11 | 6 | 3 | 25 |

в) $\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{25} = 3,2.$

50.11. Вычислите дисперсию и среднее квадратичное распределения отметок: а) по литературе; б) по русскому языку. в) По какому предмету отметки, в среднем, выше? г) По какому предмету отметки имеют более устойчивый характер?

Решение. а) Составим таблицу для подсчета квадратов отклонений от среднего значения 3,44 по литературе.

| | Отметка (варианта) | | | | |
|-----------------------------|--------------------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Кратность | 1 | 5 | 6 | 8 | 5 |
| Отклонение от среднего 3,44 | -2,44 | -1,44 | -0,44 | 0,56 | 1,56 |
| Квадрат отклонения | 5,9536 | 2,0736 | 0,1936 | 0,3136 | 2,4336 |

Сумма квадратов отклонений равна:

$$1 \cdot 5,9536 + 5 \cdot 2,0736 + 6 \cdot 0,1936 + 8 \cdot 0,3136 + 5 \cdot 2,4336 = 32,16.$$

$$D = \frac{32,16}{25} = 1,2864, \sigma_{\text{литер}} = \sqrt{D} \approx 1,134.$$

б) Составим таблицу для подсчета квадратов отклонений от среднего значения 3,2 по русскому языку.

| | Отметка (варианта) | | | | |
|----------------------------|--------------------|------|------|------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Кратность | 2 | 3 | 11 | 6 | 3 |
| Отклонение от среднего 3,2 | -2,2 | -1,2 | -0,2 | 0,8 | 1,8 |
| Квадрат отклонения | 4,84 | 1,44 | 0,04 | 0,64 | 3,24 |

Сумма квадратов отклонений равна:

$$2 \cdot 4,84 + 3 \cdot 1,44 + 11 \cdot 0,04 + 6 \cdot 0,64 + 3 \cdot 3,24 = 28.$$

$$D = \frac{28}{25} = 1,12, \quad \sigma_{\text{руск}} = \sqrt{D} \approx 1,0583.$$

в) Так как 3,44 больше 3,2, то в среднем отметки по литературе лучше (выше).

г) Так как $\sigma_{\text{руск}} < \sigma_{\text{литер}}$, то отметки по русскому языку имеют более устойчивый характер.

Следующие две задачи похожи на задачи по комбинаторике из курса алгебры 9 класса. Только в них вместо вопроса «Сколько...?» ставится вопрос «Чему равна вероятность?»

51.2. На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -4, -1, 1, 4, 8 (повторения допускаются). Из отмеченных точек случайным образом выбирают одну. Найти вероятность того, что она лежит: а) правее оси ординат; б) ниже оси абсцисс; в) в четвертой координатной четверти; г) ниже прямой $y = x$.

Решение. По правилу умножения получаем, что всего отмечено $N = 5 \cdot 5 = 25$ точек.

а) Лежать правее оси ординат — это значит иметь положительную абсциссу. По правилу умножения получаем $N(A) = 3 \cdot 5 = 15$. Вероятность равна $\frac{15}{25} = 0,6$.

б) Лежать ниже оси абсцисс — это значит иметь отрицательную ординату. По правилу умножения получаем $N(A) = 5 \cdot 2 = 10$. Вероятность равна $\frac{10}{25} = 0,4$.

в) Лежать в четвертой координатной четверти — это значит иметь положительную абсциссу и отрицательную ординату. По правилу умножения получаем $N(A) = 3 \cdot 2 = 6$. Вероятность равна $\frac{6}{25} = 0,24$.

г) Лежать ниже прямой $y = x$ — это значит иметь абсциссу больше, чем ординату. Из всех 25 точек у 5 точек координаты равны между собой. Оставшиеся $25 - 5 = 20$ точек делятся на два множества, симметричных относительно прямой $y = x$. Для точек одного множества абсциссы больше ординат, для точек другого множества, наоборот, абсциссы меньше ординат. Поэтому $N(A) = 20 : 2 = 10$ и вероятность равна $\frac{10}{25} = 0,4$.

51.4. Составили множество всех чисел вида $x = 2^a 5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (совпадения допускаются). Из этого множества случайным образом выбрали одно число. Какова вероятность того, что оно будет: а) больше 1; б) меньше 20; в) нечетным; г) не оканчиваться нулем?

Решение. Для выбора показателя степени a есть 5 исходов и независимо от этого для выбора показателя степени b есть 5 исходов. По правилу умножения получаем, что всего составлено $N = 5 \cdot 5 = 25$ чисел.

а) Только одно число равно $1 = 2^0 \cdot 5^0$. Все остальные числа больше 1. Вероятность равна $\frac{24}{25} = 0,96$.

б) Пусть $a = 0$; в этом случае $x = 2^a 5^b = 5^b$. Тогда $x < 20 \Leftrightarrow b < 2$, т. е. $b = 0$ или $b = 1$. Пусть $a = 1$; в этом случае $x = 2^a \cdot 5^b = 2 \cdot 5^b$. Здесь тоже $b = 0$ или $b = 1$. Пусть $a = 2$; в этом случае $x = 2^a \cdot 5^b = 4 \cdot 5^b$. Тогда $b = 0$, так как уже при $b = 1$ получаем $x = 4 \cdot 5 = 20$. Аналогично и при $a = 3$, и при $a = 4$ интересующее нас событие произойдет только при $b = 0$. Всего получается $2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$ исходов, благоприятствующих наступлению нужного события $x < 20$. Вероятность равна $\frac{7}{25} = 0,28$.

в) Число $x = 2^a 5^b$ будет нечетным в том и только в том случае, когда $a = 0$. Таких случаев пять: столько, сколько есть вариантов выбора для b . Вероятность равна $\frac{5}{25} = 0,2$.

г) Число $x = 2^a 5^b$ оканчивается нулем в том и только в том случае, когда $a > 0$ и $b > 0$, т. е. для выбора каждого из чисел a и b есть 4 варианта: 1, 2, 3, 4. По правилу умножения получаем, что $N(A) = 4 \cdot 4 = 16$. Значит, в $25 - 16 = 9$ случаях число не будет оканчиваться нулем. Вероятность равна $\frac{9}{25} = 0,36$.

Следующая задача показывает, что в заметном числе случаев выгоднее вычислять вероятность не самого события, а противоположного ему события.

51.8. Игральную кость бросили дважды. Найти вероятность того, что:

- а) среди выпавших чисел нет ни одной пятерки;
- б) среди выпавших чисел есть или пятерка, или шестерка;
- в) сумма выпавших чисел меньше 11;
- г) произведение выпавших чисел меньше 25.

Решение. По правилу умножения получаем, что возможны $N = 6 \cdot 6 = 36$ исходов: ведь при каждом броске независимым образом возможны 6 исходов.

а) Интересующее нас событие произойдет только в том случае, когда и в первый, и во второй раз выпало одно из следующих чисел: 1, 2, 3, 4, 6. Всего $N(A) = 5 \cdot 5 = 25$ исходов. Вероятность равна $\frac{25}{36}$.

б) Противоположное к интересующему нас событие состоит в том, что не выпала пятерка, и не выпала четверка, т. е. и в первый, и во второй раз выпало одно из следующих чисел: 1, 2, 3, 6. Всего $4 \cdot 4 = 16$ исходов. Значит, интересующее нас событие произойдет при наступлении $36 - 16 = 20$ исходов. Вероятность равна $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

в) Противоположное к интересующему нас событие состоит в том, что сумма очков больше или равна 11. Но это возможно только в трех случаях, когда выпали две шестерки ($6 + 6$) и когда выпали одна пятерка и одна шестерка ($5 + 6, 6 + 5$). Значит, интересующее нас событие произойдет при наступлении $36 - 3 = 33$ исходов. Вероятность равна $\frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

г) Противоположное к интересующему нас событие состоит в том, что произведение очков больше или равно 25. Но это возможно только в следующих случаях: $5 \cdot 5 = 25, 5 \cdot 6 = 30, 6 \cdot 5 = 30, 6 \cdot 6 = 36$. Значит, интересующее нас событие произойдет при наступлении $36 - 4 = 32$ исходов. Вероятность равна $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$.

51.10. В русском языке 33 буквы: 10 гласных, 21 согласная и две специальные буквы (ъ и ь). Два ученика независимо друг от друга выбрали по одной букве русского алфавита. Какова вероятность того, что:

- а) были выбраны различные буквы;
- б) обе выбранные буквы — гласные;
- в) среди выбранных букв есть согласные;
- г) это две соседние буквы алфавита.

Решение. Пронумеруем учеников. И у первого ученика, и у второго независимо друг от друга есть 33 способа выбрать

одну букву. По правилу умножения число всех способов выбора двух букв $N = 33 \cdot 33 = 33^2$.

а) Пусть A — интересующее нас событие и \bar{A} — противоположное ему событие. Последнее состоит в том, что были выбраны одинаковые буквы. Событие \bar{A} наступает в 33 случаях: выбраны две буквы «а», выбраны две буквы «б», ..., выбраны две буквы «я». Значит, $N(\bar{A}) = 33$ и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{33}{33^2} = \frac{32}{33}$.

б) Каждый ученик независимо от другого может выбрать гласную букву десятью способами. По правилу умножения число всех способов выбора двух гласных букв равно $10 \cdot 10 = 10^2$.

Поэтому вероятность равна $\left(\frac{10}{33}\right)^2 \approx 0,092$.

в) Пусть B — интересующее нас событие и \bar{B} — противоположное ему событие. Последнее состоит в том, что обе выбранные буквы не являются согласными. Каждый ученик независимо от другого может выбрать не согласную букву 12-ю способами. Значит, $N(\bar{B}) = 12 \cdot 12$ и $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{12}{33}\right)^2 \approx 0,868$.

г) Если первый ученик выбрал «а», то для наступления интересующего нас события второй должен выбрать «б». Если первый ученик выбрал «б», то для наступления интересующего нас события второй должен выбрать «а» или «в». Если первый ученик выбрал «в», то для наступления интересующего нас события второй должен выбрать «б» или «г». Продолжая, получаем, что событие наступит в $1 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{31} + 1 = 64$ случаях. Поэтому

вероятность равна $\frac{64}{33^2} \approx 0,059$.

51.11. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 поочередно выбирают два. Найти вероятность того, что:

- а) первое из чисел меньше второго;
- б) эти два числа — длины катетов прямоугольного треугольника с целочисленной гипотенузой;
- в) произведение этих чисел оканчивается нулем;
- г) первое из чисел делится на второе.

Решение. Для выбора первого числа x есть 5 исходов, для выбора второго числа y есть 4 исхода. По правилу умножения выбор пары $(x; y)$ имеет $N = 5 \cdot 4 = 20$ исходов.

а) Если $x = 1$, то выбор $y = 2, 3, 4, 5$ обеспечивает наступление события. Аналогично, если $x = 2$, то $y = 3, 4, 5$, если $x = 3$, то $y = 4, 5$, если $x = 4$, то $y = 5$. Всего 10 пар. Вероятность равна

$\frac{10}{20} = 0,5$. Можно решить и без перебора. По условию $x \neq y$. Каждому выбору пары $(x; y)$ с $x > y$ взаимно однозначно соответствует выбор пары $(y; x)$ с $y < x$. Значит, условию задачи удовлетворяет ровно половина всех исходов и вероятность равна 0,5.

б) Перебор всех пар $(x; y)$ показывает, что $x^2 + y^2$ будет квадратом целого числа только в двух случаях: $(x; y) = (3; 4)$ и $(x; y) = (4; 3)$. Вероятность равна $\frac{2}{20} = 0,1$.

в) Перебор всех пар $(x; y)$ показывает, что xy будет кратно 10 только в 4 случаях: $(x; y) = (2; 5)$ и $(x; y) = (5; 2)$, $(x; y) = (4; 5)$ и $(x; y) = (5; 4)$. Вероятность равна $\frac{4}{20} = 0,2$.

г) Если $x = 1$, то при любом выборе $y = 2, 3, 4, 5$ событие не происходит. Если $x = 2$, то $y = 1$, если $x = 3$, то $y = 1$, если $x = 4$, то $y = 1, 2$, если $x = 5$, то $y = 1$. Всего 5 пар. Вероятность равна $\frac{5}{20} = 0,25$.

52.5. Сколькими нулями оканчивается число: а) $10!$; б) $15!$; в) $26!$; г) $100!$?

Решение. а) Разложим $10!$ на простые множители:

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 100.$$

Значит, $10!$ оканчивается на 2 нуля. Важно, что степень двойки будет больше степени пятерки. Кстати, ответ можно найти и в учебнике.

б) Если $15!$ также разложить на простые множители, то нулей на конце будет ровно столько, какова будет степень пятерки. А эта степень равна 3, так как ровно 3 числа (5, 10, 15) кратны 5.

в) Рассуждение с числом $26!$ аналогично, но при переходе через 25 нас поджидает сюрприз: число 25 даст два множителя, кратных 5. Итак, 5, 10, 15, 20 дадут по одной пятерке, а 25 — две пятерки. Значит, $26!$ оканчивается на 6 нулей.

г) Это классическая задача математических олимпиад для младших школьников, начиная с шестидесятых годов. Стоящая отдельно — это довольно сложная для общеобразовательной школы задача. Но с учетом предыдущих задач № 52.1—52.4 это просто задача, завершающая некоторую учебную мини-тему.

От 1 до 100 есть 20 чисел, кратных 5. Это 5, 10, 15, 20, ..., 95, 100. Каждое из них при разложении на простые сомножители даст по пятерке. Кроме того, числа 25, 50, 75, 100 кратны 25 и поэтому дадут еще по одной пятерке. Значит, $100!$ оканчивается на 24 нуля.

Ответ: а) 2; б) 3; в) 6; г) 24.

В задачах № 52.12 и 52.13 проверяется и знание основных комбинаторных формул и базовые умения решать неравенства и вычислять проценты. В большинстве случаев при выборе двух или трех элементов можно использовать не общие формулы для A_n^k и C_n^k , а их простейшие случаи $A_n^2 = n(n-1)$, $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ и $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Задача № 52.12 в определенной степени подсказывает, как решать далее задачу № 52.18.

52.12. Решить неравенство:

- а) $120 < A_{k-3}^2 < 140$; в) $C_{10}^2 < A_x^2 < 60$;
 б) $C_6^2 < A_n^2 < C_8^2$; г) $C_{19}^2 < A_x^2 + C_x^2 < 200$.

Решение. а) $120 < A_{k-3}^2 < 140 \Leftrightarrow 120 < (k-3)(k-4) < 140$.

Крайне неразумно тут раскрывать скобки и решать два неравенства. Значительно быстрее перебрать случаи $k = 4, 5, 6, 7, 8, \dots$. Тогда $(k-3)(k-4) = 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, \dots$

Подходит только число 132. Поэтому $k-3 = 12$, $k-4 = 11$, $k = 15$.

б) $C_6^2 < A_n^2 < C_8^2 \Leftrightarrow 15 < n(n-1) < 28$. Значит, $n(n-1) = 20$, $n = 5$.

в) $C_{10}^2 < A_x^2 < 60 \Leftrightarrow 45 < x(x-1) < 60$. Значит, $x(x-1) = 56$, $x = 8$.

г) Получаем $171 < x(x-1) + \frac{x(x-1)}{2} < 200$; $114 < x(x-1) < 133\frac{1}{3}$;
 $x(x-1) = 132$; $x = 12$.

52.13. Найти значение n , при котором:

- а) число C_{n+1}^2 составляет 80 % от числа C_n^3 ;
 б) число C_{n+1}^3 составляет 120 % от числа C_n^4 ;
 в) число C_{2n+1}^{n+1} составляет 56 % от числа C_{2n+1}^{n-1} ;
 г) число C_{2n+3}^n составляет 120 % от числа C_{2n+2}^{n+1} .

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } C_{n+1}^2 = 0,8C_n^3 &\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 0,8\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow 3(n+1) = \\ &= 0,8(n^2 - 3n + 2) \Leftrightarrow 15n + 15 = 4(n^2 - 3n + 2) \Leftrightarrow 4n^2 - 27n - 7 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n-7)(4n+1) = 0. \text{ Итак, } n = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } C_{n+1}^3 &= 1,2C_n^4 \Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = 1,2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \Leftrightarrow n+1 = \\ &= 0,3(n^2 - 5n + 6) \Leftrightarrow 10n + 10 = 3(n^2 - 5n + 6) \Leftrightarrow 3n^2 - 25n + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n-8)(3n-1) = 0. \text{ И так, } n = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } C_{2n+1}^{n+1} &= 0,56C_{2n+1}^{n-1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = 0,56 \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!} \Leftrightarrow 1 = \\ &= 0,56 \frac{2n+1}{n+2} \Leftrightarrow n+2 = 1,12n + 0,56 \Leftrightarrow 1,44 = 0,12n \Leftrightarrow n = 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } C_{2n+3}^n &= 1,2C_{2n+2}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(2n+3)!}{n!(n+3)!} = 1,2 \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \Leftrightarrow \frac{2n+3}{(n+2)(n+3)} = \\ &= 1,2 \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 5(2n+3)(n+1) = 6(n+2)(n+3) \Leftrightarrow 4n^2 - 5n - 21 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n-3)(4n+7) = 0 \Leftrightarrow n = 3. \end{aligned}$$

Пункты задачи № 52.15 включают в себя и размещения, и сочетания, и аккуратный перебор всех возможных случаев.

52.15. Три клавиши из семи клавиш, соответствующих нотам до, ре, ми, фа, соль, ля, си одной октавы, можно нажать либо одновременно (аккорд), либо поочередно (трезвучие).

а) Найти число всех возможных трезвучий.

б) Найти число всех возможных аккордов.

в) Найти число всех возможных аккордов, содержащих ноту соль.

г) Найти число всех возможных аккордов, в которых нет подряд идущих нот.

Решение. а) При выборе трезвучия по его определению порядок выбора важен. Значит, всего есть $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ трезвучий в одной октаве.

Кстати, можно было действовать просто по правилу умножения без всяких формул для числа размещений. Это довольно типичная ситуация, т. е. практически во всех задачах (уровня общеобразовательной школы), связанных с поочередным выбором, можно обойтись ровно правилом умножения, не прибегая к специальному знанию выученных на память формул для числа размещений.

б) Каждый аккорд из трех нот при разном порядке нажатия клавиш даст 6 трезвучий. Значит, аккордов в 6 раз меньше, чем трезвучий: $210 : 6 = 35$.

Можно также использовать формулу для числа сочетаний:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

в) По существу это та же задача, что и в пункте б). Только выбрать нужно (без учета порядка) 2 ноты из 6: ведь нота соль уже фиксирована. Итак, $C_2^6 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$.

г) Для краткости пронумеруем клавиши по порядку: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и проведем перебор случаев.

Пусть «меньшая» выбранная клавиша — это 1, и пусть выбрана клавиша 3. Тогда третьей может быть клавиша 5, 6, 7. Всего 3 случая. Пусть выбраны клавиши 1 и 4. Тогда третьей клавишей может быть 6 или 7. Всего 2 случая. При выборе клавиш 1 и 5 можно добавить только клавишу 7 (вариант 1, 3, 5 уже посчитан). Итак, есть $3 + 2 + 1 = 6$ нужных аккордов, содержащих ноту до.

Пусть «меньшая» выбранная клавиша — это 2. Перечислим поочередно все подходящие аккорды: (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7). Всего 3 аккорда.

Пусть «меньшая» выбранная клавиша — это 3. Тогда возможен только аккорд (3, 5, 7). Складывая все варианты, получаем, что возможны 10 аккордов без подряд идущих нот.

52.17. За четверть в классе прошли 5 тем по алгебре. Для подготовки к контрольной работе составлено по 10 задач к каждой теме. На контрольной будет по одной задаче из каждой темы. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найти:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

Решение. Представим, что есть 5 листков. На каждом по 10 задач, из которых и будет составлена контрольная. На каждом листке ученик отметил те 8 задач, которые умеет решать.

а) Мы предполагаем, что при составлении контрольной выбор по одной задаче из каждого листка будет проводиться *независимым* образом (в противном случае вряд ли эту задачу можно решить). Значит, к пяти испытаниям — выборам пяти задач — применимо правило умножения. Получаем ответ: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$.

б) Рассуждение аналогично, только на каждом из листков выбор производится из восьми отмеченных задач. По правилу умножения получаем ответ: $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 2^{15} = 32\,768$.

в) Рассуждение аналогично, только на каждом из листков выбор производится из двух задач, которые ученик не может решить. По правилу умножения получаем: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

г) В этом задании несколько смешаны задания пунктов б) и в). На первом листке выбор производится из двух задач, которые ученик не смог решить, а на остальных четырех листках — из восьми отмеченных задач. По правилу умножения получаем ответ: $2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 12^{13} = 8192$.

52.18. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом за руку. Рукопожатий было от 60 до 70. Сколько всего человек встретилось, если известно, что:

- а) каждый здоровался с каждым;
- б) только один человек не здоровался ни с кем;
- в) только двое не поздоровались между собой;
- г) четверо поздоровались только между собой и все остальные поздоровались только между собой?

Решение. а) Рукопожатие — это выбор двух человек из n данных. Порядок при этом не важен. Значит, если каждый поздоровался с каждым, то получится $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ рукопожатий. Можно, конечно, решать два квадратных неравенства $60 \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq 70$. Но проще подобрать натуральное n , при котором верно двойное неравенство. Вообще числа $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ образуют такую последовательность: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, Только одно из них (66) удовлетворяет нужному неравенству. Это происходит при $n = 12$.

б) Тут можно применить рассуждения пункта а) ко всем, кто вообще здоровался. Их будет 12 человек. Ну и еще один, который «не дружит» ни с кем. Ответ: 13.

в) Здесь получается неравенство $60 \leq \frac{n(n-1)}{2} - 1 \leq 70$. Значит, $n = 12$, как и в пункте а).

г) В подгруппе из 4 человек было 6 рукопожатий. Значит, среди оставшихся $k = n - 4$ было от 54 до 64 рукопожатий, т. е.

$$54 \leq \frac{k(k-1)}{2} \leq 64, \quad k = 11. \text{ Всего было 15 человек.}$$

52.19. Из 20 вопросов к экзамену ученик 12 выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Найти количество возможных вариантов билета.

б) Сколько из них тех, в которых ученик знает ответы на все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?

г) Сколько из них тех, в которых ученик выучил большинство ответов на вопросы?

Решение. а) Хотя в реальном экзаменационном билете вопросы могут идти в разном порядке, но для сдающего экзамен порядок вопросов не важен. Значит, есть всего $C_{20}^3 = 1140$ вариантов билета: именно столькими способами 3 вопроса можно выбрать из имеющихся 20.

б) Тут уже выбор происходит только из тех 12 вопросов, которые выучил ученик. Значит, всего $C_{12}^3 = 220$ вариантов билета, в котором ответы на все три вопроса выучены.

в) Один из 12 выученных вопросов можно выбрать двенадцатью способами. Один из пяти неизвестных вопросов — пятью способами. Один из трех частично выученных — тремя способами. По правилу умножения получается $12 \cdot 5 \cdot 3 = 180$ билетов.

г) Большинство из трех — это или 3, или 2 выученных вопроса. Первый случай уже разобран в пункте б), $C_{12}^3 = 220$. Два вопроса из 12 выученных можно выбрать $C_{12}^2 = 66$ способами. Один вопрос из 8 оставшихся — восемью способами. По правилу умножения получается $8 \cdot 66 = 528$. Значит, всего получится $220 + 528 = 748$ билетов, в которых выучено большинство ответов на вопросы.

52.20. В оперном театре 10 певцов и 8 певиц, а в хоре по пьесе 5 мужских и 3 женские партии.

а) Сколько существует различных составов хора?

б) То же, но если известно, что певцы А и Б ни за что не будут петь вместе?

в) То же, но если известно, что певец А будет петь тогда и только тогда, когда будет петь певица В?

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и одной певице придется петь мужскую партию.

Решение. а) Тут предполагается, что выбор певцов и выбор певиц происходит *независимым* друг от друга образом. Из 10 певцов можно ровно $C_{10}^5 = 252$ способами выбрать 5 хористов: ведь порядок тут неважен. Аналогично, из 8 певиц можно ровно $C_8^3 = 56$ способами выбрать трех хористок. По правилу умножения получаем ответ: $252 \cdot 56 = 14\,112$.

б) Из ответа в пункте а) следует вычесть число тех составов хора, в которые входят и певец А, и певец Б. Раз они уже вошли в состав хора, то из оставшихся 8 певцов надо выбрать трех. Это можно сделать ровно $C_8^3 = 56$ способами. С певицами по сравнению с пунктом а) ничего не изменилось. По правилу умножения получаем ответ: $14\,112 - 56^2 = 14\,112 - 3136 = 10\,976$.

в) Возможны две ситуации: певица В поет или не поет в хоре. В первом случае из оставшихся семи певиц надо выбрать двух. Это можно сделать ровно $C_7^2 = 21$ способом.

В таком случае в хоре будет и певец А, а из оставшихся девяти певцов надо выбрать четырех. Это можно сделать ровно $C_9^4 = 126$ способами. Значит, тут есть $126 \cdot 21$ составов хора. Если же певица В не поет в хоре, то есть ровно $C_7^3 = 35$ способов выбора певиц. В таком случае не будет петь и А, и есть ровно $C_9^5 = C_9^4 = 126$ способов выбора из оставшихся девяти певцов и, следовательно, $126 \cdot 35$ составов хора. Всего получается $126 \cdot 21 + 126 \cdot 35 = 126 \cdot 56 = 7056$ вариантов — ровно половина из всех возможных.

г) Так как осталось только 4 певца, то всем им придется петь: тут есть единственный вариант выбора. Одну певицу, заменяющую певца, можно выбрать восемью способами, а из оставшихся семи певиц можно ровно $C_7^3 = 35$ способами выбрать трех хористок. По правилу умножения получаем ответ: $8 \cdot 35 = 280$.

53.3. Найти коэффициент при x^3 у многочлена $P(x)$:

а) $P(x) = (1 + 3x)^4$; в) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$;

б) $P(x) = (3 - 2x)^5$; г) $P(x) = (x^2 - x)^4 + \left(3 - \frac{x}{3}\right)^4$.

Решение.

а) $P(x) = (1 + 3x)^4 = 1 + 4 \cdot (3x) + 6 \cdot (3x)^2 + 4 \cdot (3x)^3 + (3x)^4$.

Ответ: 108.

б) $P(x) = (3 - 2x)^5 = 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot (-2x) + 10 \cdot 3^3 \cdot (-2x)^2 + 10 \cdot 3^2 \cdot (-2x)^3 + \dots$

Ответ: -720.

в) Коэффициент перед x^3 в уменьшаемом равен $10 \cdot 2^2 = 40$. Коэффициент перед x^3 в вычитаемом равен $4 \cdot 2^3 = 32$.

Ответ: 8.

г) В первом слагаемом минимальный показатель степени у x равен 4 и нет членов, содержащих третью степень переменной. Коэффициент перед x^3 во втором слагаемом равен $4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{4}{9}$.

53.4. Найти член разложения, не содержащий переменных:

а) $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$; б) $\left(3\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$.

Решение. а) В данном случае в формуле бинома Ньютона $n = 6$, $a = 2x^2$, $b = x^{-1}$. Тогда

$$C_n^k a^{n-k} b^k = C_6^k (2x^2)^{6-k} (x^{-1})^k = C_6^k 2^{6-k} x^{12-2k-k} = (C_6^k 2^{6-k}) x^{12-3k}.$$

Такой одночлен из разложения $(a + b)^n$ в сумму одночленов не содержит переменной x , только если $k = 4$. Тогда $C_6^4 2^{6-4} = C_6^4 2^{6-4} = 15 \cdot 4 = 60$.

б) Здесь $n = 9$ первое слагаемое двучлена равно $3a^{\frac{1}{4}}$, а второе слагаемое равно $a^{-\frac{1}{2}}$. Тогда

$$C_9^k (3a^{\frac{1}{4}})^{9-k} (a^{-\frac{1}{2}})^k = C_9^k 3^{9-k} (a^{\frac{1}{4}})^{9-k-2k} = C_9^k 3^{9-k} (a^{\frac{3}{4}})^{3-k}.$$

Такой одночлен не содержит переменной a , только если $k = 3$; при этом значении k получаем $C_9^3 \cdot 3^6 = 84 \cdot 729 = 61\,236$.

53.7. Доказать, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого положительного числа x справедливо неравенство $(1+x)^n > 1 + nx$.

Решение. $(1+x)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot x^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot x^k + \dots + C_n^n x^n > 1 + nx$, так как $C_n^0 \cdot 1^n = 1$, $C_n^1 \cdot 1^{n-1} \times x^1 = nx$, а все слагаемые $C_n^2 \cdot x^2, \dots, C_n^k \cdot x^k, C_n^n x^n$ положительны.

54.4. Карточка лотереи «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах) вероятность того, что на вашей карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано ровно: а) 0 чисел; б) 1 число; в) 2 числа; г) 3 числа?

Решение. При случайном выборе 6 чисел из 49 возможны C_{49}^6 исходов, т. е. C_{49}^6 наборов по 6 чисел из 49. Поэтому $N = C_{49}^6$.

а) Ни одно из чисел на вашей карточке не совпало с выигрышными числами, если 6 чисел на карточке оказались среди $49 - 6 = 43$ невыигрышных чисел. Количество таких исходов равно C_{43}^6 , т. е. количеству наборов по 6 чисел из 43. Поэтому $N(A) = C_{43}^6$ и

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{43}^6}{C_{49}^6} = \frac{43!}{6! \cdot 37!} \cdot \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} \approx 0,436.$$

В процентах получается 43,6 %.

б) Единственное выигрышное число можно выбрать из 6 выигрышных шестью способами, а 5 невыигрышных чисел можно выбрать из 43 невыигрышных чисел C_{43}^5 способами. По правилу умножения $N(B) = 6 \cdot C_{43}^5$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{N(B)}{N} = \frac{6 \cdot C_{43}^5}{C_{49}^6} = \frac{6 \cdot 43!}{5! \cdot 38!} \cdot \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{36 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = \\ &= \frac{36}{38} \cdot P(A) \approx 0,413. \end{aligned}$$

В процентах получается 41,3 %.

в) Два выигрышных числа можно выбрать из 6 выигрышных C_6^2 способами, а 4 невыигрышных числа можно выбрать из 43 невыигрышных чисел C_{43}^4 способами. По правилу умножения $N(C) = C_6^2 \cdot C_{43}^4$. Поэтому

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{43}^4}{C_{49}^6} = \frac{15 \cdot 43!}{4! \cdot 39!} \cdot \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{450 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = \\ = \frac{450}{36 \cdot 39} \cdot P(B) \approx 0,132.$$

В процентах получается 13,2 %.

г) Аналогично пунктам б) и в) получаем

$$P(D) = \frac{N(D)}{N} = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} = \frac{20 \cdot 43!}{3! \cdot 40!} \cdot \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{2400 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = \\ = \frac{2400}{450 \cdot 40} P(C) \approx 0,0176.$$

В процентах получается 1,77 %.

54.11. Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что:

- каждому достался тот вопрос, который он выучил;
- никому не достался вопрос, который он выучил;
- только одному из приятелей достался тот вопрос, который он не выучил;
- хотя бы одному из приятелей достался тот вопрос, который он выучил.

Решение. Речь идет о четырех независимых повторениях одного и того же испытания: ответа на один из 20 вопросов. При этом вероятность p «успеха» равна $\frac{5}{20} = 0,25$, так как каждый из

приятелей знает ровно 5 из 20 возможных вопросов. Итак, мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой $n = 4$, $p = 0,25$, $q = 0,75$.

а) В этом пункте все 4 раза произошел «успех», т. е. $k = 4$. По формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ получаем $P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^{4-4} = 0,25^4 \approx 0,004$.

б) Тут все четыре раза произошла «неудача», т. е. $k = 0$. По формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ получаем $P_4(0) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 = 0,75^4 \approx 0,316$.

в) Тут три раза произошла «неудача» и был один «успех», т. е. $k = 1$. По формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ получаем

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^{4-1} = 4 \cdot 0,25^1 \cdot 0,75 = 0,25^2 \cdot 0,75 \approx 0,047.$$

г) Здесь $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ или $k = 4$. Другими словами, $k \neq 0$. Значит, вероятность равна $1 - P_4(0) \approx 0,684$.

54.15. Внутри окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, взята точка. Найдите вероятность того, что она:

- а) лежит внутри треугольника;
- б) лежит внутри окружности, вписанной в треугольник;
- в) лежит вне треугольника;
- г) лежит внутри треугольника, но не внутри вписанной в него окружности.

Решение. Гипотенуза равна 10, а радиус R описанной окружности равен 5.

а) $P = \frac{S_{\text{треуг}}}{S_{\text{круг}}} = \frac{24}{25\pi} \approx 0,305577 \approx 0,306$.

б) Радиус r вписанной окружности равен $\frac{S_{\text{треуг}}}{0,5(6 + 8 + 10)} = \frac{24}{12} = 2$. Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Значит, вероятность равна $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0,16$.

в) Здесь надо найти вероятность события, которое противоположно событию из пункта а). Поэтому искомая вероятность равна примерно 0,7.

г) $\frac{24 - 4\pi}{25\pi} \approx 0,146$.

54.16. Карточка лотереи «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах) вероятность того, что на вашей карточке верно угадано: а) хотя бы одно число; б) не более одного числа; в) не менее трех чисел; г) 4, 5 или 6 чисел?

Решение. По существу это продолжение задачи № 54.4.

а) Событие «угадать хотя бы одно число» противоположно событию «не угадать ни одного числа». Поэтому (см. № 54.4 а)) в процентах получается $100\% - 43,6\% = 56,4\%$.

б) Событие «угадать не более одного числа» есть сумма двух несовместных событий «не угадать ни одного числа» и «угадать ровно одно число». Поэтому (см. № 54.4 а) и б)) в процентах получается $43,6\% + 41,3\% = 84,9\%$.

в) Событие «угадать не менее трех чисел» противоположно событию «угадать менее трех чисел», которое есть сумма трех несовместных событий: «не угадать ни одного числа», «угадать ровно одно число», «угадать ровно два числа». Поэтому (см. № 54.4 а) — в)) в процентах получается $100\% - 43,6\% - 41,3\% - 13,2\% = 1,9\%$.

г) Из предыдущей вероятности следует вычесть еще вероятность события «угадать ровно три числа». Получается (см. № 54.4 г)) $1,9\% - 1,77\% = 0,13\%$.

54.18. Вы находитесь в круглом зале с десятью дверями, из которых какие-то 4 заперты. Вы случайным образом выбираете 2 двери. Найдите вероятность того, что: а) вы не сможете выйти из зала; б) вы сможете выйти из зала, но вернуться через другую выбранную дверь уже не сможете; в) вы сможете через одну дверь выйти, а через другую вернуться в зал; г) хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала.

Решение. 2 двери из 10 можно выбрать $C_{10}^2 = 45$ способами. Поэтому $N = 45$.

а) Событие состоит в том, что обе двери выбраны из 4 запертых. Число таких выборов равно $C_4^2 = 6$. Значит, вероятность равна $\frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

б) Событие состоит в том, что выбрана одна запертая и одна открытая дверь. По правилу умножения число таких выборов равно $4 \cdot 6$. Значит, вероятность равна $\frac{4 \cdot 6}{45} = \frac{8}{15}$.

в) Событие состоит в том, что обе двери выбраны из 6 открытых. Число таких выборов равно $C_6^2 = 15$. Значит, вероятность равна $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

г) Это событие противоположно событию из пункта а). Поэтому его вероятность равна $1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$.

Следующая задача — одна из типичнейших задач на диаграммы Эйлера, или же на так называемую формулу «включений-исключений».

54.19. У каждого из туристов есть или тугрики, или евро (рис. 103). У 100 туристов есть только тугрики, у 38 туристов есть только евро, а у 31 % туристов есть обе валюты.

а) Сколько туристов имеют ровно одну валюту? б) Сколько всего туристов? в) Сколько туристов имеют тугрики? г) Сколько туристов имеют евро?

Решение. а) $100 + 38 = 138$.

б) Пусть всего x туристов. Тогда $x = 138 + 0,31x$, $0,69x = 138$, $x = 200$.

в) $100 + 0,31 \cdot 200 = 162$ (или $200 - 38 = 162$).

г) $38 + 0,31 \cdot 200 = 100$ (или $200 - 100 = 100$).



Рис. 103

Следующий сюжет задачи — классический для любого задачника, в котором есть упражнения на нахождение вероятности суммы двух независимых испытаний.

54.21. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень одного из них равна 0,5. Найти вероятность попадания в мишень другого стрелка, если известно, что:

- а) вероятность того, что мишень будет поражена дважды, равна 0,4;
- б) вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу, равна 0,45;
- в) вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз, равна 0,8;
- г) вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз, равна 0,999.

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, и B — событие, состоящее в том, что второй стрелок попал в мишень; $P(A) = 0,5$, $P(B) = x$.

а) Двукратное поражение мишени, т. е. одновременное наступление событий A и B , означает, что произошло событие AB . Так как события независимы, то $0,4 = P(AB) = P(A)P(B) = 0,5x$, $x = 0,8$.

б) Двукратное «непоражение» мишени, т. е. одновременное наступление событий \bar{A} и \bar{B} , означает, что произошло событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$. Так как события независимы, то $0,45 = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,5(1 - x)$, $1 - x = 0,9$, $x = 0,1$.

в) Поражение мишени, т. е. наступление хотя бы одного из событий A или B , означает, что произошло событие $A + B$. Так как события независимы, то

$$0,8 = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,5 + x - 0,5x; 0,3 = 0,5x, x = 0,6.$$

г) Аналогично пункту в) получаем:

$$0,999 = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \\ = 0,5 + x - 0,5x; \quad 0,499 = 0,5x; \quad x = 0,998.$$

Теперь перейдем от разных стрелков к одному, который каждый очередной выстрел производит независимо от результатов предыдущих. Ясно, что это простейшая модель реальной ситуации, и именно простота модели позволяет проводить вычисления по формуле Бернулли.

54.22. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при одном выстреле, равна 0,4. Стрелок независимо производит 5 выстрелов.

а) Заполните таблицу распределения вероятностей $P_5(k)$ того, что из 5 выстрелов будет ровно k попаданий:

| Число попаданий, k | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| $P_5(k) = C_5^k \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{5-k}$ | | | | | | |

б) Найдите вероятность того, что стрелок ни разу не промахнет.

в) Найдите вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее двух раз.

г) Каково наиболее вероятное число попаданий в мишень?

Решение. а) Число k попаданий может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Во второй строке надо просто аккуратно произвести вычисления.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^5 = 0,6^5 = 0,07776 \approx 0,078.$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 5 \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 = 0,2592 \approx 0,259.$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 1,6 \cdot 0,6^3 = 0,3456 \approx 0,346.$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,64 \cdot 0,6^2 = 0,2304 \approx 0,23.$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^1 = 3 \cdot 0,4^4 = 0,0768 \approx 0,077.$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^0 = 0,4^5 = 0,01024 \approx 0,01.$$

б) Это просто уже найденная вероятность $P_5(5) \approx 0,01$.

в) Это сумма $P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) \approx 0,346 + 0,23 + 0,077 + 0,01 = 0,663$.

г) Из составленной в а) таблицы видно, что наибольшая вероятность получается при $k = 2$. Поэтому вероятность двукратного поражения мишени при 5 выстрелах в данном случае является наибольшей.

Последняя из разбираемых задач главы 9 продолжает общую линию интеграции нового стохастического материала в уже

сложившийся курс алгебры и начал математического анализа. Другими словами, хотя формально — это задача по новой теме «Геометрические вероятности», содержательно тут отрабатывается базовое умение решать простейшие неравенства и изображать множества их решений на числовой прямой.

54.23. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $\sqrt{x} \leq 10$. Найдите вероятность того, что оно:

- а) является решением неравенства $\sqrt{x} \leq 1$;
- б) принадлежит области определения функции $y = \ln(40x - 39 - x^2)$;
- в) является решением неравенства $\sqrt{x-10} \leq 5$;
- г) принадлежит области значений функции

$$y = 0,5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

Решение. Множество X одинаково для всех пунктов задачи: $X = \{x: \sqrt{x} \leq 10\}$. Поэтому $X = [0; 100]$ и длина $l(X)$ этого множества равна 100.

а) Пусть $A = \{x \in X: \sqrt{x} \leq 1\}$. Тогда $A = [0; 1]$, $l(A) = 1$ и $P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,01$.

б) Пусть

$$A = \{x \in X: 40x - 39 - x^2 > 0\} = \{x \in X: (x-1)(x-39) < 0\} = (1; 39).$$

$$\text{Тогда } l(A) = 38 \text{ и } P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,38.$$

в) Решим сначала неравенство

$$\sqrt{x-10} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-10 \geq 0, \\ x-10 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 35. \text{ Значит, } A = [10; 35],$$

$$l(A) = 25 \text{ и } P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,25.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } E\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) &= (-\infty; +\infty) \Rightarrow E\left(\sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = [-1; 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow E\left(0,5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = [-0,5; 0,5] \Rightarrow E\left(0,5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1\right) = \\ &= [0,5; 1,5]. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } A = E(f) = [0,5; 1,5], l(A) = 1 \text{ и } P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,01.$$

Конечно, можно использовать формулы приведения и двойного аргумента, но для нахождения $E(f)$, как мы видим, вполне можно обойтись и без них.

Глава 10

55.11. а) Решить уравнение $(x^2 - 9)(\sqrt{3 - 2x} - x) = 0$.

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$x^2 - 9 = 0; \sqrt{3 - 2x} - x = 0.$$

Из первого уравнения получаем $x = 3$ или $x = -3$. Первое значение — посторонний корень, оно не удовлетворяет неравенству $3 - 2x \geq 0$, задающему ОДЗ исходного уравнения. Решая второе уравнение, получаем: $3 - 2x = x^2$; $x = 1$ или $x = -3$. Второе значение является посторонним корнем для иррационального уравнения, тем не менее оно является корнем исходного уравнения, что уже было отмечено выше.

Ответ: 1, -3.

5.12. а) Решить уравнение $\sin 2x\sqrt{4 - x^2} = 0$.

Решение. Решив уравнение $\sin 2x = 0$, получим $x = \frac{\pi n}{2}$. Из этой серии надо отобрать те значения, которые удовлетворяют неравенству $4 - x^2 > 0$, т. е. $-2 < x < 2$.

Таковыми будут $x = 0$ (при $n = 0$), $x = \pm \frac{\pi}{2}$ (при $n = \pm 1$). Решив уравнение $\sqrt{4 - x^2} = 0$, получим еще два корня: $x = \pm 2$.

Ответ: 0, $\pm \frac{\pi}{2}$, ± 2 .

56.37. а) Решить уравнение

$$\sin x \cos x - 6 \sin x + 6 \cos x + 6 = 0.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 2, преобразуем его к виду

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0. \quad (1)$$

Положим $y = \sin x - \cos x$ и воспользуемся тем, что

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x.$$

Это значит, что $\sin 2x = 1 - y^2$; теперь уравнение (1) примет вид $1 - y^2 - 12y + 12 = 0$, т. е. $y^2 + 12y - 13 = 0$, откуда находим два корня: 1 и -13.

Уравнение $\sin x - \cos x = -13$ корней не имеет, а из уравнения $\sin x - \cos x = 1$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = \pi + 2\pi n$.

56.38. а) Решить уравнение $2^x \cdot 5^{\frac{1+x}{x}} = 50$.

Решение. Учтем, что $50 = 2 \cdot 5^2$, и разделим обе части уравнения на 5^2 и на 2^x . Получим:

$$5^{\frac{1+x}{x}-2} = 2^{1-x};$$

$$5^{\frac{1-x}{x}} = 2^{1-x}.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5:

$$\frac{1-x}{x} = \log_5 2^{1-x}.$$

Далее последовательно получаем:

$$\begin{aligned} 1-x &= x(1-x)\log_5 2; \\ (1-x)(1-x\log_5 2) &= 0; \\ x_1 = 1, x_2 &= \frac{1}{\log_5 2} = \log_2 5. \end{aligned}$$

56.39. Решить уравнения:

$$a) 2^{5x-1} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \log_{0,5}(x+4) = 0;$$

$$б) (\sin 2x + \cos 2x)(x - 8\sqrt{2x-15}) = 0;$$

Решение. а) Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$2^{5x-1} = 0; \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \log_{0,5}(x+4) = 0.$$

Первое уравнение не имеет корней, из третьего находим: $x = -3$. Из второго уравнения находим:

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n. \quad (2)$$

Но нужно учесть область определения исходного уравнения: $x > -4$. Очевидно, что вся серия $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ при $n \geq 0$ удовлетворяет неравенству $x > -4$. Если $n = -1$, то получим: $x = -\frac{\pi}{3} - \pi$; это число меньше, чем -4 . Тем более будут меньше, чем -4 , и все значения x , которые получаются из формулы (2) при $n = -2, -3, -4, \dots$

В итоге имеем: $x = -3, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \geq 0$.

б) Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin 2x + \cos 2x = 0; \quad x - 8\sqrt{2x-15} = 0.$$

Решая второе уравнение, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} x &= 8\sqrt{2x-15}; \\ x^2 &= 64(2x-15); \\ x_1 &= 8, x_2 = 120. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют иррациональному уравнению.

Решая первое уравнение совокупности, получаем:

$$\operatorname{tg} 2x = -1;$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}. \quad (3)$$

Но надо учесть область определения исходного уравнения: $x \geq 7,5$. Для этого в формуле (3) осуществим перебор по параметру.

Если $n = 5$, то из формулы (3) получим $x = \frac{19\pi}{8} \approx 7,46$; это немного меньше, чем 7,5. Тем более будут меньше, чем 7,5, все те значения x , которые получаются из формулы (3) при $n < 5$. Если же $n \geq 6$, то соответствующие значения x входят в область определения исходного уравнения.

В итоге имеем: $x = 8$, $x = 120$, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \geq 6$.

56.40. б) Решить уравнение $-\cos 7\pi x = x^2 - 6x + 10$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$-\cos 7\pi x = (x - 3)^2 + 1.$$

Очевидно, что

$$\begin{cases} -\cos 7\pi x \leq 1, \\ (x - 3)^2 + 1 \geq 1. \end{cases}$$

Следовательно, корнем заданного уравнения может быть только такое число, которое одновременно обращает оба неравенства системы в равенства. Это — число 3.

Ответ: 3.

56.41. а) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{(x - 1)^2 + 1} + \log_3 \sqrt{(x - 1)^2 + 9} = 2.$$

Очевидно, что

$$(x - 1)^2 + 1 \geq 1,$$

$$\log_3 \sqrt{(x - 1)^2 + 9} \geq \log_3 \sqrt{9} = 1.$$

Значит, корнем заданного уравнения может быть только такое число, которое одновременно обращает оба неравенства в равенства. Это — число 1.

Ответ: 1.

57.14. б) Решить неравенство $(2 \cdot 0,1^x + 3)^{10} \leq (0,1^x + 103)^{10}$.

Решение. Неравенство имеет структуру $A^{10} \leq B^{10}$, переход от него к неравенству $A \leq B$ не является равносильным преобразованием. Законная схема решения такова: $A^{10} - B^{10} \leq 0$; $(A^5 - B^5)(A^5 + B^5) \leq 0$. Теперь следует учесть, что по смыслу заданного неравенства A и B — выражения, принимающие лишь положительные значения. Поэтому неравенство $(A^5 - B^5)(A^5 + B^5) \leq 0$ равносильно неравенству $A^5 - B^5 \leq 0$, т. е. $A^5 \leq B^5$. А вот теперь переход к неравенству $A \leq B$ уже является равносильным преобразованием.

Таким образом, мы приходим к неравенству $2 \cdot 0,1^x + 3 \leq 0,1^x + 103$, откуда получаем: $0,1^x \leq 100$; $x \geq -2$.

57.15. а) Решить неравенство $(3 - 3 \log_{0,2} x)^{13} < (\log_{0,2} x + 7)^{13}$.

Решение. Неравенство имеет структуру $A^{13} < B^{13}$, переход от него к неравенству $A < B$ является равносильным преобразованием. Значит, последовательно получаем:

$$3 - 3 \log_{0,2} x < \log_{0,2} x + 7;$$

$$\log_{0,2} x > -1;$$

$$0 < x < 5.$$

57.21. б) Решить неравенство $9^{\log_{0,1} x} - 4 \cdot 3^{\log_{0,1} x} + 0,1^{\log_{0,1} x} < 0$.

Решение. Есть смысл ввести новую переменную $y = 3^{\log_{0,1} x}$ и учесть, что $0,1^{\log_{0,1} x} = 3$. Тогда получим квадратное неравенство $y^2 - 4y + 3 < 0$, откуда находим: $1 < y < 3$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$1 < 3^{\log_{0,1} x} < 3; \quad 0 < \log_{0,1} x < 1;$$

$$\log_{0,1} 1 < \log_{0,1} x < \log_{0,1} 0,1; \quad 0,1 < x < 1.$$

57.22. Решить неравенство:

$$\text{а) } 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 \leq 0; \quad \text{б) } \cos^2 x - 5 \cos x + 4 \leq 0.$$

Решение. На самом деле это не слишком сложные примеры, они отнесены в разряд упражнений «с темной точкой» лишь потому, что стандарт в принципе не предусматривает на базовом уровне решение тригонометрических неравенств.

а) Имеем $0,5 \leq \sin x \leq 1$. Правая часть этого двойного неравенства справедлива при любых значениях x , ее можно опустить, так что остается лишь решить неравенство $\sin x \geq 0,5$.

б) Имеем $1 \leq \cos x \leq 4$. Как и в пункте а), правая часть этого двойного неравенства справедлива при любых значениях x , ее можно опустить, так что остается лишь решить неравенство $\cos x \geq 1$, которое сводится к уравнению $\cos x = 1$.

57.25. Решить неравенство:

$$б) \sin x \leq -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1; \quad г) \sin x \geq -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1.$$

Решение. б) Графиком функции $y = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$ является парабола с ветвями, направленными вниз, и с вершиной в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; она изображена на рисунке 104. На том же рисунке изображен и график функции $y = \sin x$, он расположен выше параболы. Значит, заданное неравенство справедливо лишь при $x = -\frac{\pi}{2}$.

г) Опираясь на рисунок 104, заключаем, что заданное неравенство выполняется при любых значениях x .

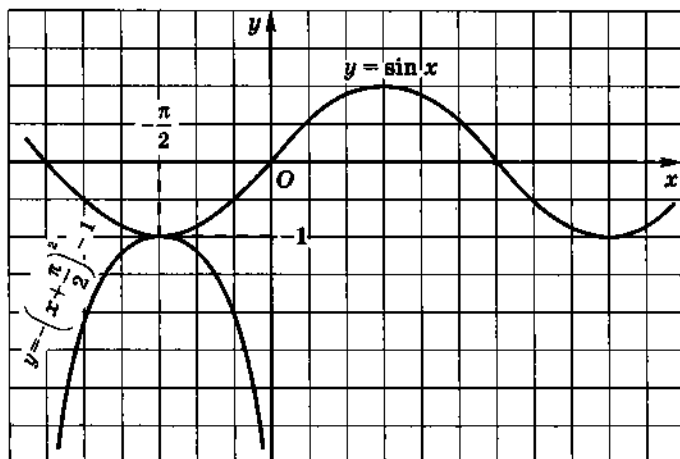


Рис. 104

57.28. Решить неравенство:

$$а) (x - 2) \log_4(x + 2) \geq 0; \quad б) (3 - x) \sqrt{\log_3(x + 5)} \leq 0.$$

Решение. а) Первый способ. Заданное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ \log_4(x + 2) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ \log_4(x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем: $\begin{cases} x \geq 2, \\ x + 2 \geq 1, \end{cases}$ т. е. $x \geq 2$.

Решая вторую систему, получаем: $\begin{cases} x \leq 2, \\ 0 < x + 2 \leq 1, \end{cases}$ т. е. $-2 < x \leq -1$.

Второй способ. Можно использовать так называемый обобщенный метод интервалов. Сначала решим уравнение $(x - 2)\log_4(x + 2) = 0$; получим: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Отметим эти точки на числовой прямой и расставим знаки функции $y = (x - 2)\log_4(x + 2)$ на получившихся промежутках; учтем область определения функции: $x > -2$ (рис. 105). Теперь ясно, что заданное неравенство выполняется при $-2 < x \leq -1$ или при $x \geq 2$.

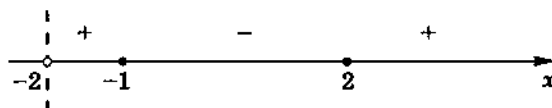


Рис. 105

б) Первый способ. Область определения неравенства задается условием $\log_3(x + 5) \geq 0$. Если $\log_3(x + 5) > 0$, т. е. $x > -4$, то $\sqrt{\log_3(x + 5)} > 0$ и, следовательно, обе части заданного неравенства можно безболезненно разделить на это выражение. В итоге приходим к системе неравенств $\begin{cases} x > -4, \\ 3 - x \leq 0, \end{cases}$ откуда получаем $x \geq 3$.

Если же $\log_3(x + 5) = 0$, т. е. $x = -4$, то заданное нестрогое неравенство автоматически выполняется. Таким образом, окончательно получаем $x \geq 3$; $x = -4$.

Второй способ. Можно снова использовать обобщенный метод интервалов. Решив уравнение $(3 - x)\sqrt{\log_3(x + 5)} = 0$, получим: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Отметим эти точки на числовой прямой и расставим знаки функции $y = (3 - x)\sqrt{\log_3(x + 5)}$ на получившихся промежутках; учтем при этом область определения функции: $x \geq -4$ (рис. 106). Теперь ясно, что заданное неравенство выполняется при $x \geq 3$ или в точке $x = -4$.

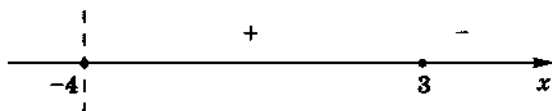


Рис. 106

57.29. б) Решить неравенство $(3 \log_3 x - 1)(3x - 4) \geq 0$.

Решение. Применим обобщенный метод интервалов. Решив уравнение $(3 \log_3 x - 1)(3x - 4) = 0$, получим: $x_1 = \sqrt[3]{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Чтобы правильно расположить полученные точки на числовой прямой, надо выяснить, что больше, $\sqrt[3]{3}$ или $\frac{4}{3}$. Предположим (наугад), что $\sqrt[3]{3} < \frac{4}{3}$. Тогда $3\sqrt[3]{3} < 4$, $81 < 64$, что неверно. Наша догадка не подтвердилась, значит, $\sqrt[3]{3} > \frac{4}{3}$. Отметим эти точки на числовой прямой и расставим знаки функции $y = (3 \log_3 x - 1) \times (3x - 4)$ на получившихся промежутках; учтем при этом область определения функции $x > 0$ (рис. 107). Теперь ясно, что заданное неравенство выполняется при $x \geq \sqrt[3]{3}$ или при $0 < x \leq \frac{4}{3}$.

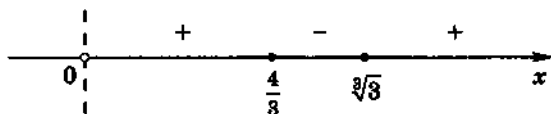


Рис. 107

58.6. а) Построить график уравнения $|x| + |y| = x + y$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности четырех смешанных систем:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ x - y = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ -x + y = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ -x - y = x + y. \end{cases}$$

Первая система задает первую координатную четверть, вторая — неотрицательную полуось абсцисс, третья — неотрицательную полуось ординат, четвертая — точку (0; 0). График уравнения представлен на рисунке 108.

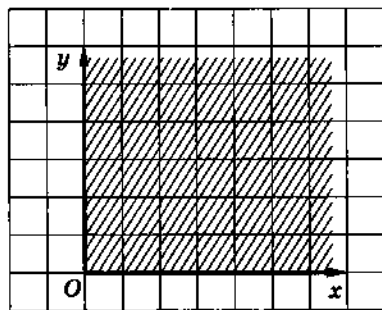


Рис. 108

58.9. Построить график уравнения: а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; б) $(x - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$; в) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; г) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$.

Решение. Обсудим данную задачу в общем виде. Дан график уравнения $f(x; y) = 0$ (рис. 109). Построить график уравнения:

1) $f(x; |y|) = 0$; 2) $f(|x|; y) = 0$; 3) $f(|x|; |y|) = 0$.

1) Нужно оставить без изменений часть графика, расположенную выше оси абсцисс, и добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси абсцисс (рис. 110).

2) Нужно оставить без изменений часть графика, расположенную правее оси ординат, и добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси ординат (рис. 111).

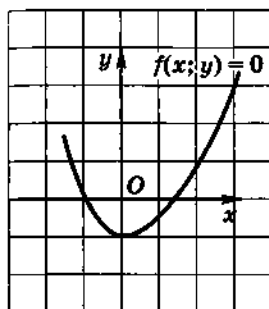


Рис. 109

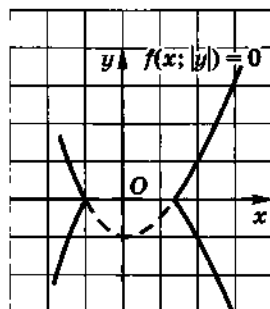


Рис. 110

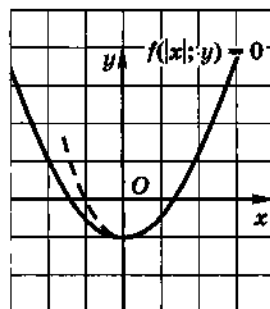


Рис. 111

3) Нужно оставить без изменений часть графика, расположенную в первой четверти, добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси ординат, а затем к полученной фигуре добавить симметричное отображение относительно оси абсцисс (рис. 112).

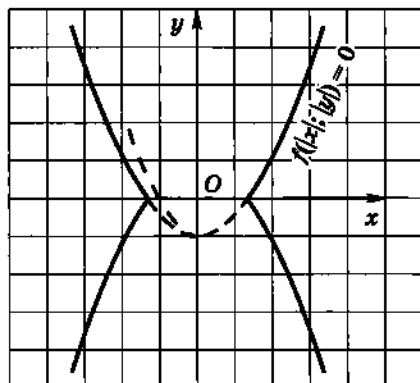


Рис. 112

Теперь перейдем к построению требуемых графиков.

а) Это окружность радиусом 4 с центром в точке (1; 2) (рис. 113).

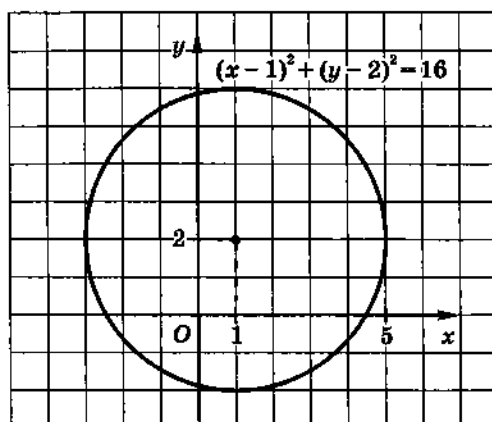


Рис. 113

б) Действуем, как сказано выше в пункте 1 (рис. 114).

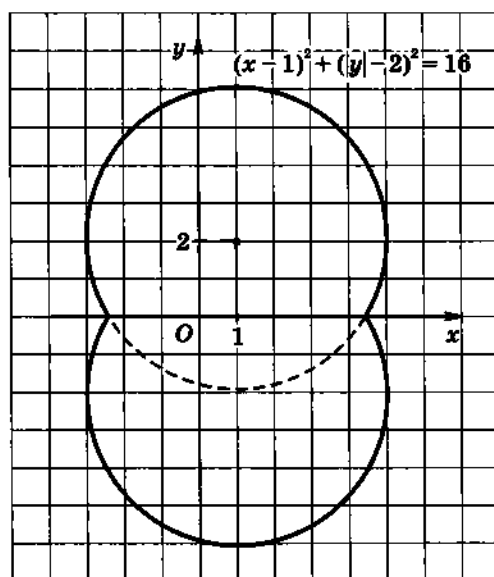


Рис. 114

в) Действуем, как сказано выше в пункте 2 (рис. 115).

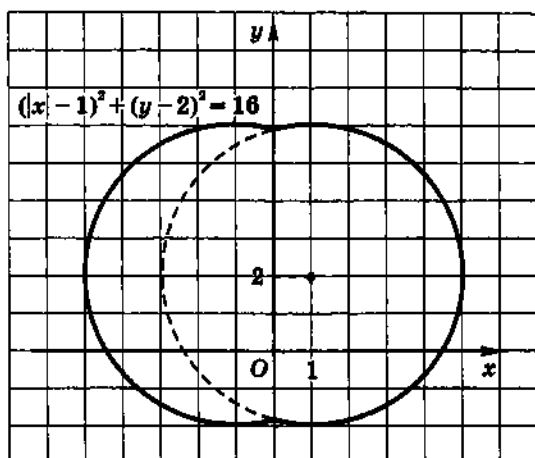


Рис. 115

г) Действуем, как сказано выше в пункте 3 (рис. 116).

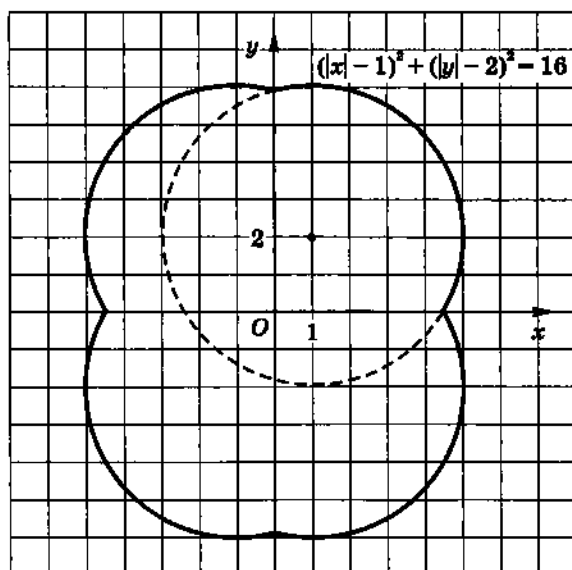


Рис. 116

58.10. а) Построить график уравнения $2|x| + 3|y| = 6$ и вычислить площадь фигуры, которая ограничена этим графиком.

Решение. Если $x \geq 0, y \geq 0$, то получаем уравнение $2x + 3y = 6$, график изображен на рисунке 117. Остается отобразить полученный отрезок симметрично относительно оси y , а затем полученную ломаную — симметрично относительно оси x (рис. 118). Площадь полученного ромба равна 12.

Аналогично решается № 58.21.

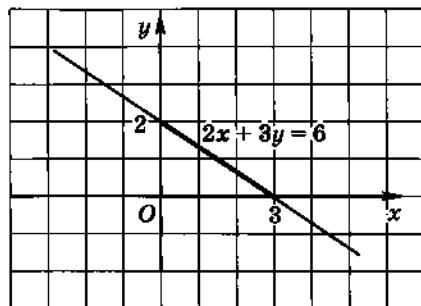


Рис. 117

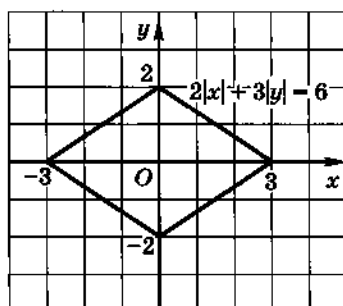


Рис. 118

58.13. а) Решить уравнение $x^2 - 5xy + 6y^2 = 2$ в целых числах.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x - 2y)(x - 3y) = 2$. Поскольку речь идет об отыскании целочисленных решений уравнения, задача сводится к решению совокупности четырех

систем: $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x - 3y = 2; \end{cases} \begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 3y = 1; \end{cases} \begin{cases} x - 2y = -1, \\ x - 3y = -2; \end{cases} \begin{cases} x - 2y = -2, \\ x - 3y = -1. \end{cases}$

Соответственно получаем: $(-1; -1), (4; 1), (1; 1), (-4; -1)$.

58.17. Построить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству: а) $2|x - 3| + 2x - 3y \leq 0$; б) $x - 3 + |y + 2| \geq 2x + 5$.

Решение. а) Если $x \geq 3$, то $|x - 3| = x - 3$ и заданное неравенство после понятных преобразований принимает вид $4x - 3y - 6 \leq 0$ или, что то же самое, $y \geq \frac{4}{3}x - 2$. Значит, надо построить часть координатной плоскости, которая расположена правее (и на) прямой $x = 3$ и выше (и на) прямой $y = \frac{4}{3}x - 2$; эта фигура изображена на рисунке 119.

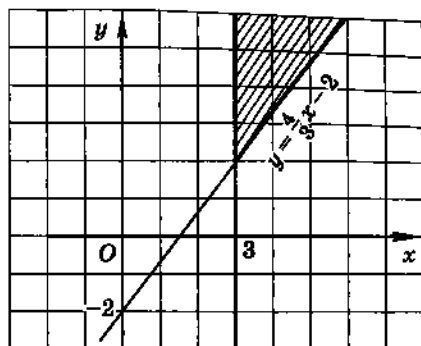


Рис. 119

Если $x < 3$, то $|x - 3| = -(x - 3)$ и заданное неравенство после преобразований принимает вид $y \geq 2$. Значит, надо построить часть координатной плоскости, которая расположена левее прямой $x = 3$ и выше (и на) прямой $y = 2$; эта фигура изображена на рисунке 120. А искомая фигура есть объединение построенных (рис. 121).

б) Если $y \geq -2$, то $|y + 2| = y + 2$ и заданное неравенство после понятных преобразований принимает вид $y \geq x + 6$. Значит, надо построить часть координатной плоскости, которая расположена выше (и на) прямой $y = -2$ и выше (и на) прямой $y = x + 6$; эта фигура изображена на рисунке 122.

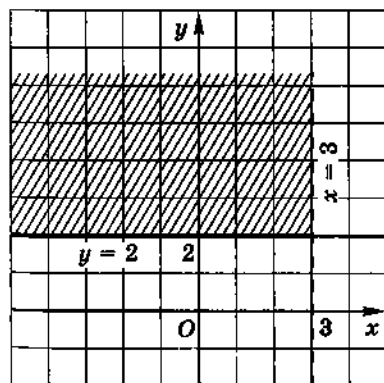


Рис. 120

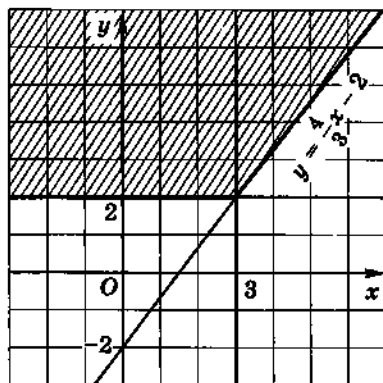


Рис. 121

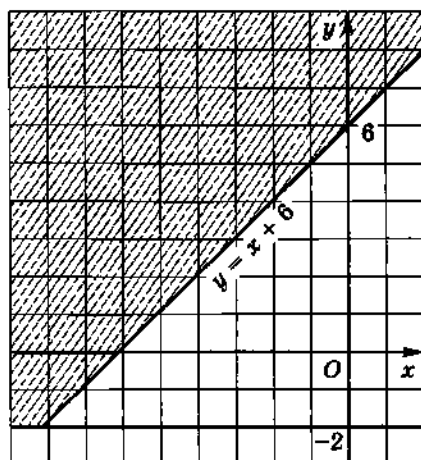


Рис. 122

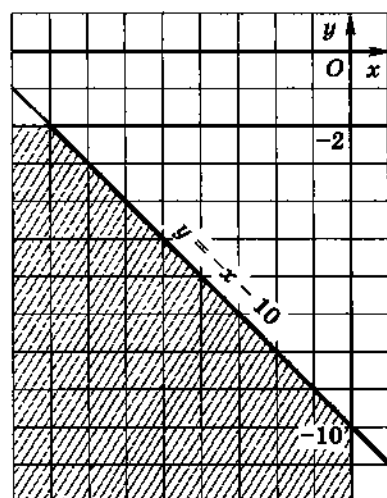


Рис. 123

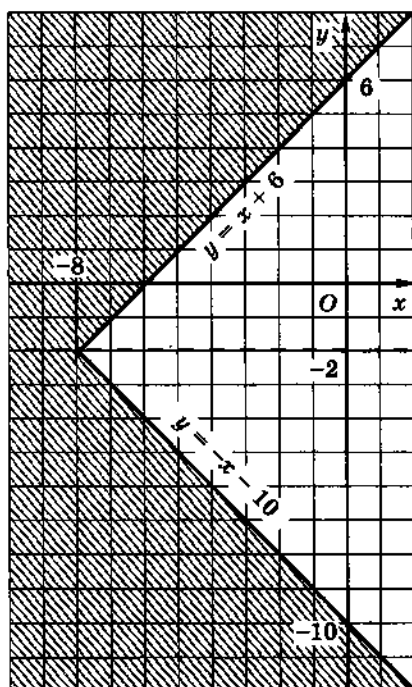


Рис. 124

Если $y < -2$, то $|y + 2| = -(y + 2)$ и заданное неравенство после преобразований принимает вид $y \leq -x - 10$. Значит, надо построить часть координатной плоскости, которая расположена ниже прямой $y = -2$ и ниже (и на) прямой $y = -x - 10$; эта фигура изображена на рисунке 123. А искомая фигура есть объединение построенных (рис. 124).

58.18. 6) Построить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $\frac{|x+y|}{x+y} x + |x+y| + y \leq 4$.

Решение. Если $x + y > 0$, то $|x + y| = x + y$ и заданное неравенство после понятных преобразований принимает вид

$y \leq 2 - x$. Значит, надо построить часть координатной плоскости, которая расположена выше прямой $y = -x$ и ниже (и на) прямой $y = 2 - x$; эта фигура изображена на рисунке 125.

Если $x + y < 0$, то $|x + y| = -(x + y)$ и заданное неравенство после преобразований принимает вид $x \geq -2$. Значит, надо построить часть координатной плоскости, которая расположена ниже прямой $y = -x$ и правее (и на) прямой $x = -2$; эта фигура изображена на рисунке 126. А искомая фигура есть объединение построенных (рис. 127).

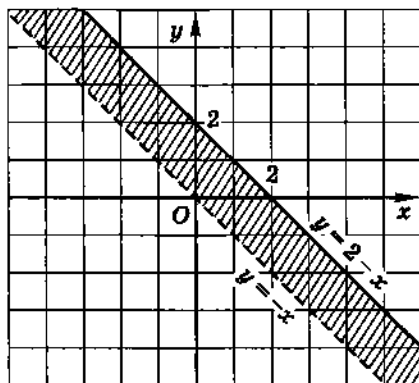


Рис. 125

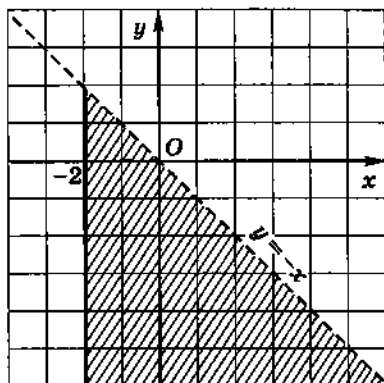


Рис. 126

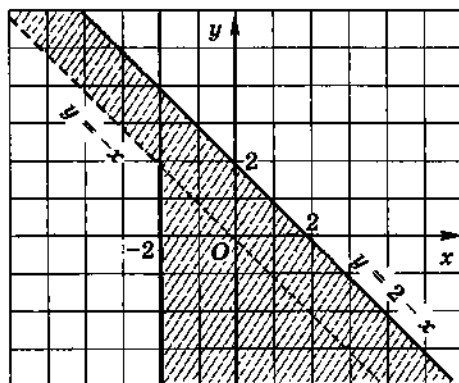


Рис. 127

58.19. г) Построить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{y^2 - 1} \geq \sqrt{2x - 1}$.

Решение. Заданное неравенство равносильно системе

$$\text{неравенств } \begin{cases} y^2 - 1 > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ y^2 - 1 > 2x - 1. \end{cases} \quad \text{Сразу замечаем, что первое нера-}$$

венство системы есть следствие второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие в системе неравенств можно опустить.

Значит, получаем более простую систему неравенств: $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ y^2 > 2x. \end{cases}$

Графиком уравнения $y^2 = 2x$ или, что то же самое, $y = \pm\sqrt{2x}$ является парабола, она изображена на рисунке 128.

Неравенству $y^2 > 2x$ удовлетворяют точки плоскости, расположенные на этой параболе, а также выше ветви $y = \sqrt{2x}$ и ниже ветви $y = -\sqrt{2x}$. Остается учесть первое неравенство системы $x \geq \frac{1}{2}$. Интересующая нас фигура изображена на рисунке 129.

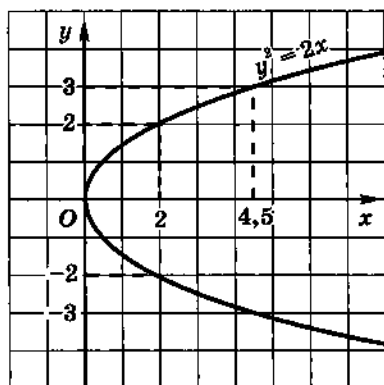


Рис. 128

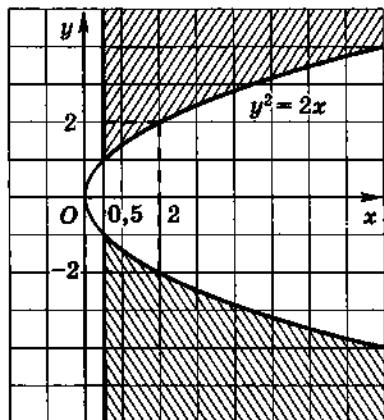


Рис. 129

58.22. б) Построить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2 + y^2 - 4}{|x| + |y| - 2} \leq 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ |x| + |y| > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ |x| + |y| < 2. \end{cases}$

Вторая система не имеет решений, а решения первой системы изображены на рисунке 130.

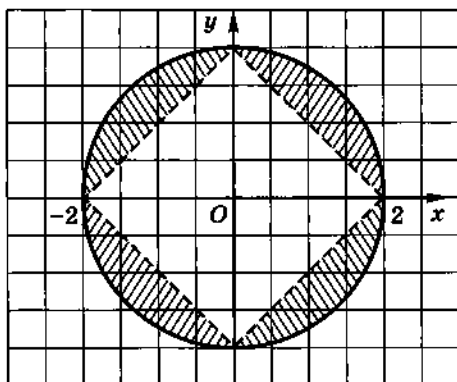


Рис. 130

58.24. Случайным образом выбирают одно из решений системы неравенств $\begin{cases} |x - y| \leq 2, \\ |x + y| \leq 2. \end{cases}$ Найти вероятность того, что выбранная точка расположена:

- а) ниже прямой $y = 1$; в) правее прямой $x = 1$;
 б) выше прямой $y = 0,5$; г) выше параболы $y = x^2$.

Решение. Поработаем с заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} -2 \leq y - x \leq 2, \\ -2 \leq y + x \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 \leq y \leq x + 2, \\ -x - 2 \leq y \leq -x + 2. \end{cases}$$

Этой системой задается квадрат с вершинами в точках $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$ (рис. 131). Площадь этого квадрата равна 8.

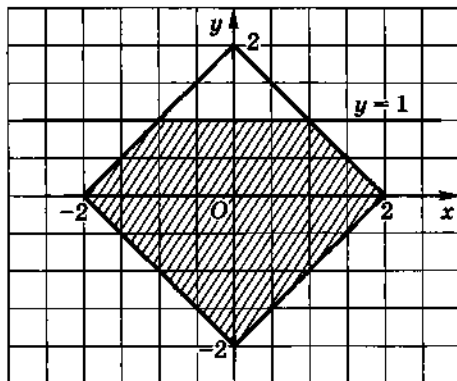


Рис. 131

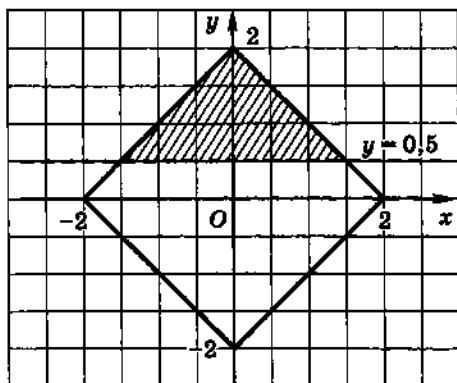


Рис. 132

а) Выше прямой $y = 1$ расположен треугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{8}$ площади всего квадрата. Значит, интересующая нас вероятность равна $\frac{7}{8}$.

б) Рассмотрим треугольник, расположенный выше прямой $y = 0,5$ (рис. 132), пусть S_1 — его площадь. Воспользуемся тем, что площади подобных треугольников относятся, как квадраты высот. Тогда $\frac{S_1}{4} = \frac{1,5^2}{2^2}$, $S_1 = \frac{9}{4}$. Искомая вероятность равна $\frac{9}{4} : 8 = \frac{9}{32}$.

в) Решение аналогично решению примера из пункта а).

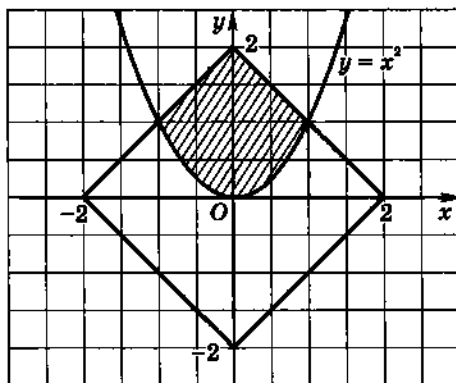


Рис. 133

г) Найдем площадь S_2 фигуры, заштрихованной на рисунке 133:

$$S_2 = 2 \int_0^1 (2 - x - x^2) dx = \frac{7}{3}.$$

Искомая вероятность равна $\frac{7}{3} : 8 = \frac{7}{24}$.

59.7. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x+y} = \log_2 16x^2, \\ \log_2 x^2 + 2\sqrt[3]{x+y} = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3^{x-y} - 7|2y-x| = 2, \\ |2y-x| - 3^{x-y-1} = -2. \end{cases}$$

Решение. а) Введем две новые переменные: $a = \sqrt[3]{x+y}$, $b = \log_2 x^2$; учтем при этом, что $\log_2 16x^2 = 4 + \log_2 x^2$. Получим более простую систему уравнений:
$$\begin{cases} 3a = 4 + b, \\ b + 2a = 6. \end{cases}$$

Находим ее решение: $a = 2$, $b = 2$. Остается решить систему
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} = 2, \\ \log_2 x^2 = 2. \end{cases}$$
 Упростив оба уравнения системы, получим:
$$\begin{cases} x+y = 8, \\ x^2 = 4. \end{cases}$$
 Эта система имеет два решения: $(2; 6)$, $(-2; 10)$.

б) Введем две новые переменные: $a = 3^{x-y-1}$, $b = |2y-x|$; учтем при этом, что $3^{x-y} = 3 \cdot 3^{x-y-1} = 3a$. Получим более простую систему уравнений:
$$\begin{cases} 3a - 7b = 2, \\ b - a = -2. \end{cases}$$

Находим ее решение: $a = 3$, $b = 1$. Остается решить систему
$$\begin{cases} 3^{x-y-1} = 3, \\ |2y-x| = 1. \end{cases}$$
 Упростив оба уравнения системы, получим совокупность систем двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x-y = 2, \\ 2y-x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 2, \\ 2y-x = -1. \end{cases} \quad \text{Получаем соответственно } (5; 3), (3; 1).$$

59.10. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y \cdot 2^{x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{x+2} = y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 2^{x-1}, \\ |x-3| = y+1. \end{cases}$$

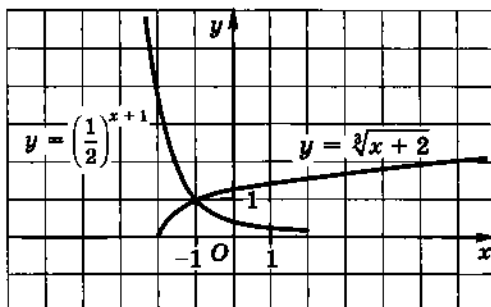


Рис. 134

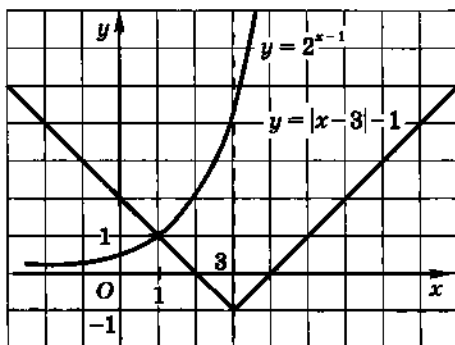


Рис. 135

Решение. а) Построив графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ и $y = \sqrt[3]{x+2}$ (рис. 134), убеждаемся, что они имеют единственную точку пересечения $(-1; 1)$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y = 2^{x-1}$, $y = |x-3| - 1$ (рис. 135), убеждаемся, что они пересекаются в одной точке $(1; 1)$. Это единственное решение заданной системы уравнений.

59.23. б) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5. \end{cases}$$

Решение. Вычтем первое уравнение системы из второго, получим: $z = y - 1$. Подставив это выражение вместо z во второе

уравнение системы, получим: $x = 2 - 3y$. Теперь третье уравнение системы можно представить как уравнение с одной переменной:

$(2 - 3y)^2 + y^2 + (y - 1)^2 = 5$. Это уравнение имеет два корня: $y_1 = 0$,

$y_2 = \frac{14}{11}$. Соответственно заданная система имеет два решения:

$$(2; 0; -1), \left(-\frac{20}{11}; \frac{14}{11}; \frac{3}{11}\right).$$

59.24. а) Составить уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки $(1; -2)$, $(-1; 8)$, $(2; -1)$.

Решение. Подставив поочередно координаты трех заданных точек в уравнение параболы, придем к системе трех уравнений

$$\text{с тремя переменными: } \begin{cases} a + b + c = -2, \\ a - b + c = 8, \\ 4a + 2b + c = -1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$. Уравнение параболы имеет вид $y = 2x^2 - 5x + 1$.

59.25. Сумма цифр задуманного трехзначного числа равна 8, а сумма квадратов его цифр равна 26. Если к задуманному числу прибавить 198, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти задуманное число.

Решение. Если x , y , z — последовательные цифры заданного числа, то само число имеет вид $100x + 10y + z$. Из первых двух условий задачи следует, что $x + y + z = 8$, $x^2 + y^2 + z^2 = 26$. Из третьего условия следует, что $100x + 10y + z + 198 = 100z + 10y + x$, откуда после упрощений получаем: $z = x + 2$. В итоге

$$\text{приходим к системе уравнений } \begin{cases} x + y + z = 8, \\ z = x + 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26. \end{cases}$$

Здесь $z = x + 2$, тогда из первого уравнения системы получаем, что $y = 6 - 2x$; теперь третье уравнение системы можно переписать так:

$$x^2 + (6 - 2x)^2 + (x + 2)^2 = 26.$$

Это уравнение имеет два корня: 1 и $\frac{7}{3}$, из которых нас, естественно, устраивает лишь первый.

Ответ: задумано число 143.

59.26. Три целых числа в заданном порядке образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 6, то получится конечная арифметическая прогрессия. Если после этого третье число увеличить на 48, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти первоначальные три числа.

Решение. Обозначим искомые числа буквами a, b, c . Они образуют геометрическую прогрессию, значит, выполняется соотношение $b^2 = ac$. Числа $a, b + 6, c$ образуют арифметическую прогрессию, значит, выполняется соотношение $b + 6 = \frac{a + c}{2}$.

Наконец, числа $a, b + 6, c + 48$ образуют геометрическую прогрессию, значит, выполняется соотношение $(b + 6)^2 = a(c + 48)$.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2(b + 6) = a + c, \\ (b + 6)^2 = a(c + 48). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем тройку чисел (3; 9; 27).

59.27. Три бригады, работая вместе, выполняют норму по изготовлению подшипников за некоторое время. Если бы первые две бригады работали в 2 раза медленнее, а третья — в 4 раза быстрее, чем обычно, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют норму в 2 раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей. Во сколько раз первая бригада производит подшипников за 1 ч больше, чем третья?

Решение. Первый этап. Составление математической модели.

Примем норму за 1, обозначим через x, y, z производительность труда соответственно первой, второй и третьей бригад, выраженную в долях единицы (в долях нормы). Введем еще одну переменную: t ч — время совместной работы трех бригад для выполнения нормы. Составляем уравнения в соответствии с условиями:

$$\begin{cases} t(x + y + z) = 1, \\ t\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 4z\right) = 1, \\ x + y = 2(y + z). \end{cases}$$

Второй этап. Работа с составленной моделью.

Сопоставляя первое и второе уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 4z; \\ x + y - 6z &= 0. \end{aligned}$$

Третье уравнение системы преобразуем к виду

$$x - y - 2z = 0.$$

Таким образом, получили систему из двух уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим $2x - 8z = 0$, т. е. $x = 4z$.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи. Спрашивают, во сколько раз первая бригада производит подшивников за 1 ч больше, чем третья, иными словами, во сколько раз производительность труда первой бригады больше производительности труда третьей.

Ответ фактически уже получен: $\frac{x}{z} = 4$.

Ответ: в 4 раза.

60.12. Решить неравенство (относительно x):

а) $\sqrt{x-2}(x-a) \geq 0$; б) $(6-x)\sqrt{x-a} > 0$.

Решение. а) $x = 2$ удовлетворяет неравенству. Если $x > 2$, то $\sqrt{x-2} > 0$ и, следовательно, заданное неравенство равносильно неравенству $x - a \geq 0$. Значит, мы приходим к системе неравенств $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq a. \end{cases}$ Дальнейшие рассуждения зависят от взаимного расположения на числовой прямой точек 2 и a . Если $a \leq 2$, то решение системы таково: $x \geq a$. Если $a > 2$, то решение системы таково: $x \geq a$. Но надо еще учесть найденное ранее решение $x = 2$, которое «проходит» при любом значении параметра. В итоге получаем следующий ответ: если $a \leq 2$, то $x \geq 2$; если $a > 2$, то $x \geq a$ или $x = 2$.

б) Данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x > a, \\ 6 - x > 0. \end{cases}$ Дальнейшие рассуждения зависят от взаимного расположения на числовой прямой точек 6 и a . Если $a < 6$, то получаем $a < x < 6$; если же $a \geq 6$, то система, а с ней и заданное неравенство, не имеют решений.

60.13. а) Найти наименьшее целочисленное значение параметра b , при котором уравнение $x^2 - 2bx + b^2 - 4b + 3 = 0$ имеет два корня.

Решение. $\frac{D}{4} = b^2 - (b^2 - 4b + 3) = 4b - 3$. Должно выполняться неравенство $4b - 3 > 0$. Наименьшим целочисленным решением этого неравенства является 1.

60.14. При каких значениях a : а) вершина параболы $y = (3a + 1)x^2 + 2x - 5$ лежит внутри четвертой координатной четверти; б) вершина параболы $y = 3x^2 + (4a - 1)x + 3$ лежит внутри первой координатной четверти?

Решение. а) Вершина параболы — это точка экстремума квадратичной функции. Имеем $y' = 2(3a + 1)x + 2$; $y' = 0$ при $x = -\frac{1}{3a + 1}$. Поскольку вершина параболы принадлежит четвертой четверти, должно выполняться неравенство $-\frac{1}{3a + 1} > 0$, т. е. $3a + 1 < 0$.

Найдем ординату вершины параболы:

$$y = (3a + 1) \cdot \left(-\frac{1}{3a + 1}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3a + 1}\right) - 5 = -\frac{1}{3a + 1} - 5 = -\frac{15a + 6}{3a + 1}.$$

Поскольку вершина параболы принадлежит четвертой четверти, должно выполняться неравенство $-\frac{15a + 6}{3a + 1} < 0$, т. е. $15a + 6 < 0$ (мы учли, что, как отмечено выше, $3a + 1 < 0$).

Итак, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 3a + 1 < 0, \\ 15a + 6 < 0; \end{cases} \text{ получаем: } a < -\frac{2}{5}.$$

б) Имеем $y' = 6x + (4a - 1)$; $y' = 0$ при $x = -\frac{4a - 1}{6}$. Поскольку вершина параболы принадлежит первой четверти, должно выполняться неравенство $-\frac{4a - 1}{6} > 0$, т. е. $4a - 1 < 0$.

Найдем ординату вершины параболы:

$$y = 3 \cdot \left(-\frac{4a - 1}{6}\right)^2 + (4a - 1) \cdot \left(-\frac{4a - 1}{6}\right) + 3 = \frac{36 - (4a - 1)^2}{12}.$$

Поскольку вершина параболы принадлежит первой четверти, должно выполняться неравенство $(4a - 1)^2 < 36$.

Итак, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4a - 1 < 0, \\ (4a - 1)^2 < 36; \end{cases} \text{ получаем: } -\frac{5}{4} < a < \frac{1}{4}.$$

60.15. а) При каких значениях a уравнение $(\log_3 a)x^2 - (2 \log_3 a - 1)x + \log_3 a - 2 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Введем обозначение: $\log_3 a = b$; тогда заданное уравнение примет вид $bx^2 - (2b - 1)x + b - 2 = 0$ — это уравнение с параметром b . Рассмотрим сначала случай, когда $b = 0$. В этом случае уравнение принимает вид $x - 2 = 0$, оно имеет единственный корень.

Пусть теперь $b \neq 0$. Тогда уравнение является квадратным, и единственный корень оно имеет тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D = (2b - 1)^2 - 4b(b - 2) = 4b + 1; D = 0 \text{ при } b = -\frac{1}{4}.$$

Итак, заданное уравнение имеет единственный корень при двух значениях нового параметра: $b = 0$, $b = -\frac{1}{4}$. Осталось вернуться к параметру, содержащемуся в условии. Поскольку $\log_3 a = b$, получаем соответственно $a = 1$, $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

60.16. При каких значениях параметра a уравнение не имеет корней:

а) $48 \cdot 4^x + 27 = a + a \cdot 4^{x+2};$

б) $9^x + 2a \cdot 3^{x+1} + 9 = 0?$

Решение. а) Преобразуем уравнение к виду

$$4^x(48 - 16a) = a - 27.$$

Сразу отмечаем, что оно не имеет корней при $a = 3$, так как при этом значении параметра a принимает вид $4^x \cdot 0 = -24$. Если $a \neq 3$, то имеем:

$$4^x = \frac{a - 27}{16(3 - a)}.$$

Это уравнение не имеет корней, если

$$\frac{a - 27}{16(3 - a)} \leq 0.$$

Решив последнее неравенство, получим: $a < 3$; $a \geq 27$. Добавим найденное выше значение параметра $a = 3$.

Ответ: $a \leq 3$; $a \geq 27$.

б) Введем новую переменную $y = 3^x$. Получим: $y^2 + 6ay + 9 = 0$.

Заданное показательное уравнение не будет иметь корней в двух случаях: 1) если дискриминант полученного квадратного уравнения отрицателен, т.е. уравнение не имеет корней; 2) если квадратное уравнение имеет корни, но они неположительны.

Первый случай. Найдем дискриминант: $\frac{D}{4} = (3a)^2 - 9$.
 $D < 0$, если $-1 < a < 1$.

Второй случай. $D \geq 0$ при $a \leq -1$ или при $a \geq 1$. Если $a \leq -1$, то оба корня квадратного уравнения положительны, поскольку и

их произведение (число 9), и их сумма (число $-6a$) — положительные числа (мы воспользовались теоремой Виета). Если же $a \geq 1$, то оба корня квадратного уравнения отрицательны, поскольку их произведение — положительное число 9, а их сумма — отрицательное число $-6a$.

Итак, корней нет, если $-1 < a < 1$ и если $a \geq 1$. Объединив эти условия, получим ответ: $a > -1$.

60.17. При каких значениях a :

а) уравнение $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + a - 1 = 0$ имеет один корень;

б) уравнение $0,01^x - 2(a + 1) \cdot 0,1^x + 4 = 0$ не имеет действительных корней?

Решение. а) Положим $y = 5^x$, тогда получится квадратное уравнение

$$y^2 - 3y + a - 1 = 0. \quad (1)$$

Заданное показательное уравнение может в двух случаях иметь один корень: 1) дискриминант $D = 0$ и единственный корень квадратного уравнения положителен; 2) $D > 0$, но из двух корней квадратного уравнения положителен только один.

Рассмотрим *первый случай*. Имеем: $D = 9 - 4(a + 1) = 13 - 4a$. $D = 0$ при $a = \frac{13}{4}$. Тогда квадратное уравнение (1) примет вид

$$y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $y = \frac{3}{2}$ — это положительное число, что нас устраивает.

Рассмотрим *второй случай*. $D > 0$ при $a < \frac{13}{4}$. Квадратное уравнение (1) имеет два корня, их сумма (по теореме Виета) равна 3, их произведение $a - 1$. Если $a - 1 < 0$, то один корень квадратного уравнения положителен, а второй отрицателен; это устраивает нас. Если $a - 1 = 0$, то квадратное уравнение (1) имеет корни 0 и 3 — снова только один положительный корень, что устраивает нас. Если же $a - 1 > 0$, то квадратное уравнение (1) имеет два положительных корня, что не устраивает нас.

б) Положим $y = 0,1^x$, тогда получится квадратное уравнение

$$y^2 - 2(a + 1) + 4 = 0. \quad (2)$$

Заданное показательное уравнение в двух случаях не имеет корней: 1) дискриминант D квадратного уравнения отрицателен; 2) $D \geq 0$, но корни квадратного уравнения неположительны.

Рассмотрим *первый случай*. Имеем: $\frac{D}{4} = (a + 1)^2 - 4$; $D < 0$ при $-3 < a < 1$.

Рассмотрим *второй случай*. $D \geq 0$ при $a \leq -3$ или при $a \geq 1$. Квадратное уравнение (2) имеет два корня, их сумма (по теореме Виета) равна $2(a + 1)$, их произведение 4. Следовательно, оба корня либо положительны, либо отрицательны. При $a \leq -3$ они отрицательны — это устраивает нас; при $a \geq 1$ они положительны — это не устраивает нас.

Итак, в первом случае получили $-3 < a < 1$, во втором $a \leq -3$; объединив эти условия, получим $a < 1$.

Ответ: а) $a = \frac{13}{4}$; $a \leq 1$; б) $a < 1$.

60.18. а) При каких значениях a уравнение $x(x + 3)^2 + a = 0$ имеет три корня?

Решение. Построим график функции $y = x(x + 3)^2$. Имеем: $y' = 1 \cdot (x + 3)^2 + 2x(x + 3) = (x + 3)(3x + 3)$; $y' = 0$ при $x = -3$ (это точка максимума) и при $x = -1$ (это точка минимума). Далее $y(-3) = 0$, $y(-1) = -4$.

Строим график функции с помощью двух найденных точек экстремума $(-3; 0)$ и $(-1; -4)$; учтем еще одну полезную точку графика — точку $(0; 0)$. График изображен на рисунке 136.

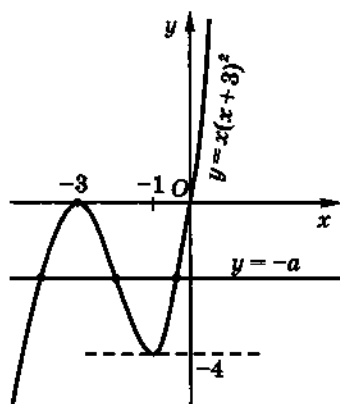


Рис. 136

Теперь нетрудно ответить на вопрос задачи: уравнение

$$x(x + 3)^2 = -a$$

имеет три корня, если $-4 < -a < 0$ (см. рис. 136), т. е. если

$$0 < a < 4.$$

Содержание

| | |
|---|---|
| Предисловие | 3 |
| Примерное планирование учебного материала | 7 |

Часть 1. Методические рекомендации по работе с учебником

| | |
|--|----|
| Тема 1. Числовые функции..... | 14 |
| Тема 2. Тригонометрические функции | 16 |
| Тема 3. Тригонометрические уравнения | 26 |
| Тема 4. Преобразование тригонометрических выражений | 30 |
| Тема 5. Производная | 34 |
| Тема 6. Степени и корни. Степенные функции..... | 51 |
| Тема 7. Показательная и логарифмическая функции..... | 56 |
| Тема 8. Первообразная и интеграл | 62 |
| Тема 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей | 64 |
| Тема 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств | 72 |

Часть 2. Решение некоторых упражнений из задачника

| | |
|----------------|-----|
| Глава 1 | 85 |
| Глава 2 | 88 |
| Глава 3 | 99 |
| Глава 4 | 111 |
| Глава 5 | 116 |
| Глава 6 | 136 |
| Глава 7 | 139 |
| Глава 8 | 145 |
| Глава 9 | 154 |
| Глава 10 | 176 |

Учебное издание

**Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович**

**АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10—11 классы**

(базовый уровень)

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Генеральный директор издательства *М. И. Безвизонная*

Главный редактор *К. И. Куровский*

Редактор *С. В. Бахтина*

Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*

Технический редактор *И. Л. Ткаченко*

Корректоры *И. Н. Баханова, Л. В. Дьячкова*

Компьютерная графика и верстка: *Е. Н. Подчепалева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.

Формат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная № 1.

Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 13,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 302

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.

Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.

E-mail: ioc@mnemozina.ru

www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»

(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.

Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.

E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).

Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный).

E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14